

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



# ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

**Том 3. Математика**

Сборник научных трудов  
XX Международной конференции студентов, аспирантов  
и молодых ученых  
25–28 апреля 2023 г.

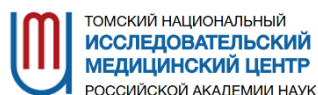
# PROSPECTS OF FUNDAMENTAL SCIENCES DEVELOPMENT

**Volume 3. Mathematics**

Abstracts  
XX International Conference of students, graduate students  
and young scientists  
April 25–28, 2023



Национальный  
исследовательский  
**Томский  
государственный  
университет**



Томск 2023

УДК 501:004(063)  
ББК 72:32.81л0  
П27

**Перспективы развития фундаментальных наук** : сборник трудов XX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск, 25–28 апреля 2023 г.) : в 7 томах. Том 3. Математика / под ред. И.А. Курзиной, Г.А. Вороновой. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2023. – 102 с.

ISBN 978-5-4387-1139-1 (т. 3)  
ISBN 978-5-4387-1136-0

Сборник содержит труды участников XX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Перспективы развития фундаментальных наук», представленные на секции «Математика».

Предназначен для студентов, аспирантов, молодых ученых и преподавателей, специализирующихся в области математического моделирования и анализа данных, математических методов в физике, химии, биофизике, биологии, экономике, медицине, психологии, математической логики и приложений, вычислительной математики, а также дифференциальных уравнений.

**УДК 501:004(063)**  
**ББК 72:32.81л0**

*Редакционная коллегия*

И.А. Курзина, доктор физико-математических наук, доцент;  
Г.А. Воронова, кандидат химических наук, доцент;  
С.А. Поробова.

ISBN 978-5-4387-1139-1 (т. 3)  
ISBN 978-5-4387-1136-0

© ФГАОУ ВО НИ ТПУ, 2023

# Tomsk International Science Program (TISP) «Molecular engineering»



The program is related to biological systems engineering. With the application of the concepts and methods of biology (and, secondly, physics, chemistry, mathematics and computer science) to solve actual problems related to the sciences of living organisms or their applications, using analytical and synthetic methodologies of engineering. Biological engineering mainly uses the rapidly developing field of molecular biology and chemoinformatics to study and develop the applications of living organisms.

Studying under this educational program is carried out in the form of full-time studying, including online studying and distance learning technologies. The program is based on problem-based learning (PBL) approach, which is more effective than traditional way of education. Students will actively acquire knowledge and skills needed for your career prospects, your future. With PBL, students are solving complex, interdisciplinary and real-life academic problems.

**Full-time form of education**

**Duration of study - 4 years**

**Areas of professional activity: healthcare, food industry, chemical, chemical-technological production, cross-cutting professional activities in industry**

**Study language - English**

**Tuition fees: 289,510 rubles a year**

**Admission exams: 2 exams, of which mathematics (mandatory) and a choice of chemistry, physics or computer science. Taking exams online from January to August 2022**

**Program Application Deadlines: January 10 - August 20, 2022. Application Link <https://admissions.tsu.ru/>**

**Objective of the program: Training of a specialist in the field of molecular engineering, capable of conducting applied research focused on development for a specific task of the enterprise. The program is aimed at training specialists with good mathematical, chemical, biological and IT fundamental background.**

**Basic disciplines: chemistry, biology, bioinformatics, biochemistry, mathematics, computer science and basic programming, metabolomics, organic synthesis, biomaterials science, applied medical biotechnology, large workshop on medical biotechnology.**

**The objects of professional activity of graduates are:** microorganisms, cellular structures of animals and plants, viruses, enzymes, biologically active chemicals; devices and equipment for studying the properties of used microorganisms, cellular structures and substances obtained with their help in laboratory and industrial conditions; plants and equipment for biotechnological processes; means of quality control of raw materials, semi-finished products and finished products. The field of activity of graduates extends from the creation of artificial organs using technical means or the search for ways to grow organs and tissues using regenerative medicine methods to compensate for reduced or lost physiological functions (biomedical engineering) and to the development of genetically modified organisms, for example, agricultural plants and animals (genetic engineering), as well as molecular design of compounds with desired properties (chemoinformatics, protein engineering, engineering enzymology).

**Places for internships for students and subsequent employment of graduates:**

Pharmaceutical companies, biotechnology companies, Research Medical Centers, scientific laboratories. Graduates of the undergraduate program can continue their studies at the master's program at TSU or other universities. From the 4th year there is a selection for the double degree program (TSU-France, ParisTech University) «Translational chemical and biomedical technologies» of the master's level.



tisp\_tsu



tisp.tsu



tsuTISP

[tisp.tsu.ru/apply/](https://tisp.tsu.ru/apply/)



## АВТОНОМНАЯ МАГИСТЕРСКАЯ ПРОГРАММА «ТРАНСЛЯЦИОННЫЕ ХИМИЧЕСКИЕ И БИМЕДИЦИНСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ»



Химический  
факультет



САЕ Институт «Умные  
материалы и технологии»

Направление подготовки	Химия
Факультет	Химический факультет
Форма обучения	Смешанный формат обучения
Продолжительность программы	2 года
Язык обучения	Русский
Бюджетные места	20

### Условия приёма

Приём на первый курс магистратуры проводится на конкурсной основе по заявлениям лиц, имеющих высшее образование. Победители и призеры олимпиад («Магистр ТГУ», «Химия биотехнологий», «Я - профессионал») имеют возможность получить максимальный балл за вступительный экзамен.

**Вступительные испытания:** экзамен по химии, собеседование.

Магистерская программа включает возможность обучения по программе двойного диплома совместно с университетом Chimie ParisTech (Франция). За период обучения по одной программе магистратуры можно получить дипломы двух Университетов, углублено освоить курсы химической технологии и инженерии материалов.

### КЛЮЧЕВЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ ПРОГРАММЫ

Основы общей иммунологии	Введение в медицинскую биологическую химию	Молекулярные методы в биомедицинских исследованиях
Основы клеточной биологии и диагностики клеточных систем	Химические технологии в медицине	Основы биоинформатики
Физико-химические методы анализа органических соединений и фармацевтических субстанций	Биоматериаловедение	Прикладная биоинформатика
		Молекулярная онкология

### Магистратура «Трансляционные химические и биомедицинские технологии» – ЭТО:

- междисциплинарные знания на стыке химии, биологии, фармакологии, клеточной и молекулярной биомедицины
- компетенции по проведению доклинических и клинических испытаний, разработка технологического регламента, сертификации, маркетингу и малотоннажному производству продукта
- стажировки в ведущих мировых университетах
- диплом международного уровня
- работа с новыми технологиями
- освоение полного цикла получения продукта: синтез-исследование, доклинические исследования, сертификация, маркетинг

### КОНТАКТЫ

Менеджер программы: **Шаповалова Елена**, +7 (953) 928 15 49, [egshapovalova@yandex.ru](mailto:egshapovalova@yandex.ru)  
Заявки оставляйте на сайте: [chembiomed.ru](http://chembiomed.ru) или через telegram-бота @smii\_tsu\_bot

[chembiomed.ru](http://chembiomed.ru) [chembiomed](https://vk.com/chembiomed)



### ПРЕИМУЩЕСТВА ПРОГРАММЫ

- Обучение на базе научных центров ТГУ и Томского НИЦМ, университетов Гейдельберга и Мюнстера (Германия)
- Ведущие зарубежные и российские специалисты
- Индивидуальная образовательная траектория
- Более 30% учебных дисциплин составляют курсы по выбору
- Виртуальные лаборатории Labster (Технический университет Дании)
- Востребованность специалистов по трансляционным химическим и биомедицинским технологиям

### ВЕДУЩИЕ ПРЕПОДАВАТЕЛИ



**Курина Ирина Александровна**  
Руководитель магистерской программы, д.ф.-м.н., доцент, заведующая базовой кафедрой природных соединений, фармацевтической и медицинской химии ХФ ТГУ, зам. заведующего лабораторией трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины, НИ ТГУ, Томск, Россия.



**Ключковская Юлия Георгиевна**  
Соруководитель магистерской программы, д.б.н., профессор, зав. лабораторией трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины, НИ ТГУ, Томск, Россия. Университет Гейдельберга, Медицинский факультет, Заведующая Отделом Врожденного Иммуитета и Иммунологической Толерантности Института Трансфузионной Медицины и Иммунологии, Мангейм, Германия.



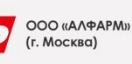
**Рыбов Вячеслав Валерьевич**  
д.м.н., заместитель директора по научной и лечебной работе НИИ кардиологии Томского НИМЦ, и.о. руководителя отделения неотложной кардиологии, профессор кафедры кардиологии ФПК и ППС СибГМУ, в.н.с. лаборатории трансляционной и клеточной биомедицины НИ ТГУ.



**Чурина Елена Георгиевна**  
д.м.н., профессор кафедры органической химии ХФ ТГУ, врач иммунолог-аллерголог, профессор кафедры патофизиологии СибГМУ, член российской ассоциации аллергологов и клинических иммунологов, Томск, Россия.



**Хайнрих Лотар Альфред**  
д.х.н., в.н.с. лаборатории трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины НИ ТГУ, Томск, Россия. President of marcotech oHG, Honorary professor of the Westphalian Wilhelms University, Muenster. Руководитель блока инновационных материалов для регенеративной медицины, Мюнстер, Германия.



Инженер-технолог

Инженер-разработчик

Инженер-исследователь



СОРБЕНТЫ • ТЕХНОЛОГИЯ ПРОИЗВОДСТВА • НАНОСТРУКТУРНЫЕ КАТАЛИЗАТОРЫ  
ХИМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ • НОВЫЕ ТИПЫ МАТЕРИАЛОВ  
ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНЫЙ КУРС • ВИРТУАЛЬНЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Дополнительная профессиональная образовательная программа профессиональной переподготовки по теме

## «МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ И ТЕХНОЛОГИИ ПРОИЗВОДСТВА ПЕРСПЕКТИВНЫХ НАНОСТРУКТУРНЫХ КАТАЛИЗАТОРОВ И СОРБЕНТОВ ДЛЯ НЕФТЕХИМИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА»

- Основана на компетентностном подходе
- Использует вариативно-модульный принцип построения образовательного процесса
- Выбор модуля обеспечивает формирование требуемых профессиональных компетенций
- Содержание программы разработано в соответствии с потребностями предприятий-производителей катализаторов и сорбентов.

Руководитель программы:

**Курзина Ирина Александровна**

Kurzina99@mail.ru

Томский государственный университет

САЕ Институт «Умные материалы и технологии»

г. Томск, пр. Ленина, 36



САЕ Институт «Умные материалы и технологии»



ФОНД ИНФРАСТРУКТУРНЫХ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ  
Группа РОСНАНО

г. Томск



## МАГИСТЕРСКАЯ ПРОГРАММА

01.04.02

### «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА» ПРОФИЛЬ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ»

Образовательная программа «**Математическое моделирование и компьютерные вычисления**» готовит специалистов высокой квалификации, владеющих формализованными методами анализа и решения междисциплинарных задач в различных областях науки и техники. Программа включает в себя математическое моделирование физических, естественно-научных, экономических процессов с использованием информационных технологий.



#### ДИСЦИПЛИНЫ ПРОФИЛЯ

##### БАЗОВЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Анализ сетевых данных  
Обработка больших объемов данных  
Программирование мобильных приложений  
Функциональный анализ для машинного обучения

##### ПРОФИЛИРУЮЩИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Современные компьютерные технологии  
Имитационное моделирование  
Программные среды в мультифизике

01.04.02

### «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА» ПРОФИЛЬ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ»

Образовательная программа «**Математические методы в экономике**» – ветвь прикладной математики и информатики. Она базируется на современном состоянии теоретической и экспериментальной науки и вычислительных технологий. Предполагает высокий уровень знания финансовой математики и современных информационных технологий.



#### ДИСЦИПЛИНЫ ПРОФИЛЯ

##### БАЗОВАЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Ценные бумаги и управление портфелем  
Методы финансового анализа  
Современные компьютерные технологии

##### ПРОФИЛИРУЮЩИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Методы анализа данных  
Математическая экономика  
Методы финансовой математики

## СОДЕРЖАНИЕ

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ СПРАВЕДЛИВЫХ ЦЕН БАРЬЕРНЫХ ОПЦИОНОВ <b>Д.М. Петров</b>	9
ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ УНИГРАММ АНГЛОЯЗЫЧНЫХ БУКТРЕЙЛЕРОВ <b>Р.Р. Исмагилов, В.А. Михайлова</b>	12
ОБНАРУЖЕНИЕ НЕЛЕГАЛЬНЫХ ТРАНЗАКЦИЙ БИТКОЙНА ПРИ ПОМОЩИ ГРАФОВЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ <b>С.А. Ильина</b>	15
КЛАСС ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ <b>Д.А. Редько</b>	18
ИССЛЕДОВАНИЕ МИОКАРДИАЛЬНОЙ ПЕРФУЗИИ МЕТОДАМИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ И ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА <b>А.С. Кандыбо, А.В. Мочула</b>	21
МЕТОДЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В РАДИОМИКЕ ДЛЯ АНАЛИЗА КАРДИОВАСКУЛЯРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ <b>Д.С. Саматов, А.В. Мочула</b>	25
РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГЕНЕТИЧЕСКИМ АЛГОРИТМОМ <b>И.А. Толстихин</b>	28
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЛУБОКИХ МОДЕЛЕЙ НЕЙРОСЕТЕЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ БУДУЩЕГО ДВИЖЕНИЯ РИСКОВЫХ КОМПОНЕНТ ПОРТФЕЛЯ АКТИВОВ <b>Е.С. Родюкевич</b>	31
ШИФРОВАНИЕ ТЕКСТОВЫХ ДАННЫХ АЛГОРИТМОМ ELLIPTIC CURVE CRYPTOGRAPHY <b>М.А. Бурнин</b>	34
РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ КОМБИНАТОРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ ДЛЯ МНОЖЕСТВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЧИСЛАМИ ФУБИНИ <b>В.А. Полюга, Ю.В. Шаблия</b>	37
ЛИНЕЙНЫЕ АВТОТОПИЗМЫ ПОЛУПОЛЕВОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ <b>Д.С. Скок</b>	40
АНАЛИЗ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ ОТРАСЛИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА SFA <b>Д.М. Иманбаева</b>	43
ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ <b>И.В. Борисенко</b>	46
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛИКВИДНОСТИ ОБЪЕКТА ВТОРИЧНОЙ ЖИЛОЙ НЕДВИЖИМОСТИ <b>М.В. Редькин</b>	50
МУЛЬТИКЛАССОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КОРПУСА СМЕШАННЫХ ТЕКСТОВ АЛГОРИТМАМИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ <b>Е.В. Гузев</b>	53
ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЙ ХИМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ НА ОСНОВЕ ФИНАНСОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ <b>А.С. Румянцева</b>	56
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА САМООЧИЩЕНИЯ СТОЧНЫХ ВОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КАПЕЛЬНОГО БИОФИЛЬТРА <b>А.В. Амзаракова</b>	59

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ ВНУТРИ ОБЪЕКТА НА ЭЛЕКТРОДНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТОКОВЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ	
<b>А.А. Афанасьева</b>	62
ВОЗМОЖНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТРЕКА ДЛЯ АЭРОБАЛЛИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ КРУПНОГАБАРИТНЫХ МОДЕЛЕЙ	
<b>А.Р. Иксанов</b>	65
АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА БАЗОВОГО МАТЕРИАЛА В ВЫСОКОПОРИСТОМ МЕТАМАТЕРИАЛЕ	
<b>Л.Р. Ахметшин</b>	68
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА	
<b>А.В. Литвинова</b>	71
РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПОЛНОГО ОПЫТА ДЛЯ ДВОЙНОГО ФОТОРОЖДЕНИЯ МЕЗОНОВ НА НУКЛОНАХ	
<b>И.А. Дементьев</b>	74
ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА–КПП	
<b>С.А. Синюков</b>	78
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ ОБРАЗЦОВ ИЗ ПОРИСТОГО НИКЕЛИДА ТИТАНА	
<b>Эльвин С. Джелилов, А.В. Ветрова, Эльвиз С. Джелилов</b>	81
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ НАНОЖИДКОСТИ В ПОЛОСТИ С ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ	
<b>Е.В. Шулепова</b>	84
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ В КАНАЛАХ С НАГРЕВАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ НА ОСНОВЕ РЕШЁТОЧНОГО МЕТОДА БОЛЬЦМАНА	
<b>Н.С. Гибанов</b>	87
РЕЖИМЫ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОБОГРЕВАЕМОЙ КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕРАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ	
<b>С.А. Михайленко</b>	90
О РЕЖИМАХ ЗАРЯДКИ И РАЗРЯДКИ В ТЕПЛОАККУМУЛИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ С ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ОТКРЫТОМ КАНАЛЕ	
<b>М.С. Астанина</b>	93
ВЛИЯНИЕ СОСТАВА НАНОЧАСТИЦ НА СВОБОДНУЮ КОНВЕКЦИЮ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ НАНОЖИДКОСТИ В ПОЛОСТИ С ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ И ПОРИСТЫМИ РЕБРАМИ	
<b>Д.С. Лоенко</b>	96
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ	
<b>Д.В. Акулова</b>	99



УДК 519.6

**ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ СПРАВЕДЛИВЫХ ЦЕН БАРЬЕРНЫХ ОПЦИОНОВ**

Д.М. Петров

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н., О.Л. Крицкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [dmp10@tpu.ru](mailto:dmp10@tpu.ru)**NUMERICAL CALCULATIONS OF FAIR PRICES FOR BARRIER OPTIONS**

D.M. Petrov

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD. O.L. Kritski

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str, 30, 634050

E-mail: [dmp10@tpu.ru](mailto:dmp10@tpu.ru)

***Abstract.** A software product for calculating the prices of barrier options has been developed. According to analytical formulas, as well as an algorithm using binomial trees, the prices of barrier options are calculated. The results obtained by different methods are compared.*

**Введение.** Барьерные опционы относятся к категории «экзотические», они торгуются на внебиржевом рынке, а их цена ниже цен обычных опционов европейского типа. Барьерными опционами называют опцион, прибыль которых зависит от того, превысит ли цена актива за определенный период времени заранее установленный «барьер». Данные опционы разделяются на включаемые (knock-in), которые вступают в силу только тогда, когда цена актива достигнет определенного уровня, и на выключаемые (knock-out), которые, наоборот, действуют до тех пор, пока цена актива не достигнет определенного уровня. В свою очередь, включаемые и выключаемые опционы подразделяются еще на несколько типов: Up-and-in, up-and-out, down-and-in, down-and-out и так далее.

Целью данной работы является расчет справедливых цен барьерных опционов по аналитическим формулам и методом биномиальных деревьев с последующим сравнением результатов.

**Методы расчета. Аналитический метод.** Рассматриваются барьерные опционы основных видов, которые перечислены выше. Для удобства, опционы покупателя и продавца будем обозначать соответственно С и Р. Для определения типа барьерного опциона будет приписываться соответствующий индекс, в зависимости от его вида. Например,  $C_{ui}$  – опцион покупателя up-and-in, а  $P_{do}$  – опцион продавца down-and-out. Известны следующие соотношения [1]:

$$C_{di} + C_{do} = C, \quad C_{ui} + C_{uo} = C, \quad P_{di} + P_{do} = P, \quad P_{ui} + P_{uo} = P.$$

Для расчета цен барьерных опционов существуют аналитические формулы, разработанные Э. Райнером, М. Рубинштейном и Д. Ричем.

Пример аналитических формул для европейских барьерных опционов [2]:

$$V_0^{C_{in}} = \begin{cases} 0, \text{ если } H \leq K \\ S_0 [N(d_1) - N(x_1)] + Ke^{-rT} [N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - N(d_1 - \sigma\sqrt{T})] + S_0 \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} \times \\ \times [N(-y) - N(-y_1)] - Ke^{-rT} \times \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})], \text{ если } H > K \end{cases}$$

$$V_0^{C_{out}} = \begin{cases} C, \text{ если } H \leq K \\ S_0 N(x_1) e^{-qT} - Ke^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 e^{-qT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)] + Ke^{-rT} \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\lambda-2} \times \\ \times [N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})], \text{ если } H > K \end{cases}$$

где  $H$  – заданный барьер,  $T$  – период исполнения,  $\sigma$  – волатильность,  $r$  – безрисковая ставка,  $q$  – дивидендная доходность акции,  $d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ ,  $y_1 = \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$ ,  $x_1 = \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$ ,  $\lambda = (r - q + \sigma^2/2)/\sigma^2$ ,  $y = \frac{\ln(H^2/S_0K)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$ ,  $d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ .

Другие аналитические формулы можно найти в [2].

**Метод биномиальных деревьев.** В этом методе требуется вычислить вероятность того, что при достижении конкретного узла цена актива пересекла барьер. В данном случае достаточно получить значения цены акции лишь в момент  $S_T$ . Используется биномиальное дерево с фиксированными вероятностями. Вероятности увеличения и снижения цены актива за период  $t$  равны  $p = 0,5$ . Коэффициенты  $u$  и  $d$  вычисляются следующим образом [3]:

$$u = \exp\left((r - q - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}\right), \quad d = \exp\left((r - q - \sigma^2/2)t - \sigma\sqrt{t}\right).$$

Вероятность попадания цены актива в конкретный узел равна:

$$\rho_{(n,i)} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \rho^i (1-\rho)^{n-i},$$

где  $n$  – количество временных шагов  $t$ ,  $i$  – количество шагов, при которых цена акции увеличивается.

Для расчета вероятности того, что цена акции пересекла барьер, дойдя до конкретного узла, можно использовать следующую формулу для опционов up-and-in и up-and-out:

$$\rho_{(n,i)}^H = f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-2}{\sigma^2 nt} \left| \ln \frac{S}{H} \ln \frac{Su^i d^{n-i}}{H} \right|\right), & \text{если } Su^i d^{n-i} < H, \\ 1, & \text{если } Su^i d^{n-i} \geq H. \end{cases}$$

Для down-and-in и down-and-out формула будет выглядеть также, только знаки в неравенствах меняются на противоположные.

Цена опциона в текущий момент времени будет вычисляться следующим образом [3]:

$$V_0 = e^{-rT} \left( \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \rho^i (1-\rho)^{n-i} \rho_{(n,i)}^H V_{(n,i)} \right),$$

где  $V_{(n,i)}$  – цена опциона в узле. Метод биномиальных деревьев позволяет найти приближенное значение цены дериватива [2].

**Результаты практических расчетов.** В программной среде Google Colaboratory [4] на языке программирования Python были проведены расчеты справедливых цен барьерных опционов по

аналитическим формулам по следующим значениям: цена исполнения (страйк)  $E = 2700$  у.е., Текущая цена  $S_0 = 3000$  у.е., время исполнения контракта  $T = 0,25$  лет, волатильность  $\sigma = 30\%$ , безрисковая ставка  $r = 0,06$ , барьеры заданы уровнями  $U = 2200, 2700, 3200$  у.е. Получены следующие результаты: Цены обычных опционов Call и Put равны  $C = 390,83$  и  $P = 50,63$

Таблица 1

Результаты расчетов аналитических цен барьерных опционов

Barrier	$C_{di}$	$C_{do}$	$C_{ui}$	$C_{uo}$	$P_{di}$	$P_{do}$	$P_{ui}$	$P_{uo}$
U = 2200	0,03	390,8	390,83	0	17,82	32,81	50,63	0
U = 2700	61,77	329,07	390,83	0	50,63	0	50,63	0
U = 3200	390,83	0	364,24	26,59	50,63	0	9,22	41,41
Соотношения	390,83		390,83		50,63		50,63	

Выполнена проверка опционных соотношений. Показано, что цены барьерных опционов рассчитаны правильно. Кроме того, методом биномиальных деревьев, а так же применяя аналитические формулы с барьерами  $U_0 = 2200$  у.е.,  $U_1 = 2500$  у.е.,  $U_2 = 2700$  у.е., для  $C_{di}$  и  $C_{do}$  получены следующие результаты:

Таблица 2

Сравнение аналитических цен с биномиальными ценами

Barrier	$C_{di}$ Binomial	$C_{di}$ Analytic	$C_{do}$ Binomial	$C_{do}$ Analytic
U = 2200	0,03	0,03	390,83	390,80
U = 2500	7,21	7,20	383,65	383,63
U = 2700	61,78	61,77	329,08	329,07

Ниже представлены графики сходимости биномиальной цены к аналитической при различных  $n$ .

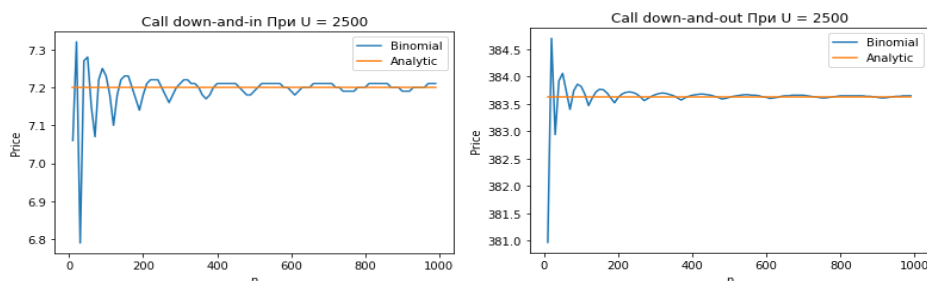


Рис. 1 Графики сходимости  $C_{di}$ ,  $C_{do}$  Binomial к ценам  $C_{di}$ ,  $C_{do}$  Analytic при барьере  $U = 2500$  у.е.

С ростом числа временных шагов биномиальная цена все ближе сходится к аналитической цене опциона.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крицкий О.Л. Стохастические дифференциальные уравнения: монография. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2023. – С. 68-69.
2. Халл Д.К. Опционы, фьючерсы, и другие производные финансовые инструменты; пер. с англ. – СПб.: Вильямс, 2008. – С.726-729.
3. Naug E. The complete guide to option pricing formulas. – McGraw Hill. 2006. – P. 306.
4. Программный комплекс расчета цен опционов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://colab.research.google.com/drive/1KB3Cb8Gaf51cR3VJO5MN\\_cFqk0IMIkR0?usp=sharing](http://colab.research.google.com/drive/1KB3Cb8Gaf51cR3VJO5MN_cFqk0IMIkR0?usp=sharing)

УДК 519.876.2

**ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ УНИГРАММ АНГЛОЯЗЫЧНЫХ БУКТРЕЙЛЕРОВ**Р.Р. Исмагилов<sup>1</sup>, В.А. Михайлова<sup>2</sup>Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н., М.Е. Семёнов<sup>1</sup><sup>1</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050,

<sup>2</sup>Московский городской педагогический университет,

Россия, г. Москва, 2-ой Сельскохозяйственный проезд, 4, к. 1, 129226

E-mail: rri10@tpu.ru

**FREQUENCY ANALYSIS OF TRANSCRIBED ENGLISH BOOK TRAILERS UNIGRAMS**R.R. Ismagilov<sup>1</sup>, V.A. Mikhailova<sup>2</sup>Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD. M.E. Semenov<sup>1</sup><sup>1</sup>Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050,<sup>2</sup>Moscow City University, Russia, 2nd Selskhozjajstvenny dr., 4, building. 1, 129226

E-mail: rri10@tpu.ru

**Abstract.** *The state of book trailers is getting pervasive nowadays as the digital era provides publishers with new tools of the advertisement. The frequency analysis using transcripts of the English book trailers' unigrams was conducted to set the most commonly used words and word groups subsequently divided into categories according to qualification and age. The results revealed that the most frequently used word is "one" (333 mentions) as both a numeral and a pronoun and the second is "book" with 278 mentions. The categories' data featured significant information that may be further leveraged in the areas of teaching the English language and book marketing.*

**Введение.** Буктрейлер - это короткий видеоролик по мотивам книги, основная задача которого рассказать о книге и заинтересовать читателя. Коммерческий аспект подобных видеороликов был закреплён Ведомством по патентам и товарным знакам США в 2003 году. В литературе крайне мало описано результатов исследований специфики воздействия буктрейлеров на потенциальных читателей. В частности, эксперимент [1] нацелен на исследование взаимосвязи книжной видеорекламы и кратких аннотаций в повышении спроса на неё. Опрос [2] продемонстрировал как интерпретации режиссёра влияет на ценность буктрейлера в качестве фактора стимулирования сбыта. В статье [3] представлено исследование книжного спроса посредством риторической теории. На основании данных исследований можно сделать вывод, что содержимое буктрейлеров, включая лексику и выражения, используемые автором, оказывают влияние на потенциального потребителя. Однако до сих пор не была приведена информация о семантической составляющей и характерной лексике аудиосопровождения буктрейлера.

Цель работы – разработка программы для проведения частотного анализа униграмм англоязычных буктрейлеров для выявления востребованных речевых конструкций в книгоиздательской среде. Для достижения цели необходимо провести сбор данных, транскрибировать аудиодорожки с помощью

Automatic Speech Recognizer (ASR) модели, провести предобработку текстовых данных и вычислить частоты встречаемости каждого слова относительно всех слов в наборе данных.

**Экспериментальная часть.** Мы использовали аудиодорожки, извлеченные из англоязычных буктрейлеров, размещенных на портале YouTube (410 записей: 110 профессиональных и 100 любительских записей, ориентированных на взрослую аудиторию; 100 профессиональных и 100 любительских записей – детскую аудиторию). Для профессиональных буктрейлеров, ориентированных на взрослую аудиторию, использовались видеоролики издательств Dutton Books, Penguin Books, Harvest Books, для профессиональных детских буктрейлеров - Scholastic. Полученные аудиофайлы были переведены в текст с помощью модели NVIDIA Conformer-Transducer [4], обученной на датасете NeMo ASRSET. Текстовые файлы были очищены от служебных слов и местоимений. Над каждым словом в документах была проведена процедура лемматизации с помощью модели WordNet [5].

**Модель Conformer.** В работе [6] представлена нейросетевая модель для распознавания речи, сочетающая достоинства свёрточных нейронных сетей и трансформеров. Архитектура трансформеров, содержащих механизм self-attention, позволяет обнаружить глобальную закономерность между элементами экземпляра входных данных исходя из их контекста. В свою очередь, свёрточные нейронные сети позволяют извлечь локальные признаки в данных, при этом плохо справляясь с оценкой признаков в глобальном плане. В основе энкодера модели Conformer лежит модель Maseron-Net [7], заменяя слой прямого распространения в блоке трансформера на два слоя прямого распространения с полуостаточной связью. Между модулями прямого распространения расположены модули механизма self-attention и свёрточный модуль. Второй модуль прямого распространения подаётся на вход слоя нормализации.

Свёрточный модуль состоит из оператора нормализации по слою; двух свёрточных слоев Pointwise [8] – свёртка с ядром размером 1x1, которая проходит по каждому элементу экземпляра данных; функции активации GLU; свёрточного слоя Depthwise [9] – свёртка проходит по каждому из каналов отдельно, после чего результаты фильтрации конкатенируются; оператора нормализации по батчу и функции активации Swish. В качестве метода регуляризации используется Dropout. В основе модуля self-attention лежит слой множественного внимания с относительными позиционными эмбедингами. Модуль прямого распространения состоит из оператора нормализации по слою; двух линейных слоёв; функции активации Swish; двух регуляризаторов Dropout. Результаты анализа приведены в таблице 1.

Таблица 1

Топ-5 частот униграмм англоязычных буктрейлеров по категориям

№	Профессиональные				Любительские			
	Взрослые		Детские		Взрослые		Детские	
1	book	135	book	59	one	113	one	62
2	one	119	friend	40	know	71	dog	49
3	like	118	one	39	book	70	new	47
4	know	105	new	36	like	65	life	44
5	really	92	life	32	story	56	like	44

**Заключение.** Данное исследование позволило выявить лексику, используемую в буктрейлерах с целью привлечения внимания аудитории к прочтению книг. В зависимости от возрастной группы, профессиональные буктрейлеры либо уделяют большее внимание апелляции к авторитету (например,

частое использование предлог «like»), знаниям, самой информации («know») и усилению упоминаемых утверждений посредством наречия «really», либо обращаются к жизненным ценностям, таким как дружба («friend») и жизнь («life»), а также к новизне происходящего («new»).

Любительские буктрейлеры подтверждают, какой именно спрос существует в книгоиздательской сфере – чему посвящены прочитанные авторами видео произведения и что именно они выделяют в них, когда стремятся поделиться избранной историей с другими людьми. Таким образом, видеоролики, нацеленные на детскую аудиторию, часто упоминают наличие в историях собак («dog»).

Все буктрейлеры, независимо от навыков автора и возрастной группы, на которую направлена реклама, объединяет частое употребление и числительного, и местоимения «one». Важно также отметить, что лексика, используемая в подобных рекламных видеороликах, по функциональности близка не только к художественному стилю речи, но и к разговорному. Данная характеристика позволяет использовать буктрейлеры в методических целях – например, в обучении английскому языку на начальном и среднем уровнях.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Basaraba, N. The Rhetoric of Transmedia Storytelling in Book Trailers Published on YouTube // Msc, Diss. Edmonton. – 2015. – 86 p.
2. Schafer-Hock, C., & Hartmann, D. (2013). How do book trailers affect the recipients? Results of the first online experiment in Germany. *Communication Today*, 2, pp. 66-79.
3. Davila, D. (2010). Not so innocent: Book trailers as promotional text and anticipatory stories. *The ALAN Review*, no. 38(1), pp. 32-42.
4. NVIDIA Conformer-Transducer X-Large [Электронный ресурс]: [http://huggingface.co/nvidia/stt\\_en\\_conformer\\_transducer\\_xlarge](http://huggingface.co/nvidia/stt_en_conformer_transducer_xlarge) (Дата обращения: 15.03.2023).
5. Khyani, Divya & B S, Siddhartha (2021) An Interpretation of Lemmatization and Stemming in Natural Language Processing. *Shanghai Ligong Daxue Xuebao. Journal of University of Shanghai for Science and Technology*, no. 22, pp. 350-357.
6. Gulati A. et al. (2020) Conformer: Convolution-augmented transformer for speech recognition. arXiv preprint arXiv:2005.08100.
7. Lu, Y., Li, Z., He, D., Sun, Z., Dong, B., Qin, T., Wang, L., & Liu, T. (2019). Understanding and Improving Transformer From a Multi-Particle Dynamic System Point of View. ArXiv, abs/1906.02762.
8. Hua, Binh-Son & Tran, Minh-Khoi & Yeung, Sai-Kit. (2018). Pointwise Convolutional Neural Networks, pp. 984-993.
9. Yunhui, G., Li, Y., Wang, L. & Rosing, T. (2019). Depthwise Convolution Is All You Need for Learning Multiple Visual Domains. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, no. 33. pp. 8368-8375.

УДК 004.89

## ОБНАРУЖЕНИЕ НЕЛЕГАЛЬНЫХ ТРАНЗАКЦИЙ БИТКОЙНА ПРИ ПОМОЩИ ГРАФОВЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

С.А. Ильина<sup>1</sup>

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. М.Е. Семенов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

<sup>2</sup>Научно-технологический университет «Сириус»,

Россия, Краснодарский край, пгт Сириус, проспект Олимпийский, д. 1, 354340,

E-mail: [sai8@tpu.ru](mailto:sai8@tpu.ru)

## DETECTION OF ILLICIT BITCOIN TRANSACTIONS USING GRAPH NEURAL NETWORKS

S.A. Iina<sup>1</sup>

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD. M.E. Semenov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

<sup>2</sup>Sirius University of Science and Technology, Russia, Krasnodar region, Sirius, Olimpiyskiy str. 1, 354340

E-mail: [sai8@tpu.ru](mailto:sai8@tpu.ru)

**Abstract.** *This article discusses possible methods for solving the problem of classifying bitcoin transactions into licit and illicit ones. The proposed options for solving this problem of anti-money laundering analytics based on graph neural networks with different architecture. The results of computational experiments using data from the Elliptic Data Set are presented.*

**Введение.** Главным преимуществом криптовалют, начиная с появления биткойнов, стала возможность совершения недорогих анонимных переводов как внутри одной страны, так и через границы. Однако анонимностью криптовалют стали пользоваться и злоумышленники для нелегального оборота товаров и услуг. Но несмотря на то, что анонимность позволяет преступникам скрываться, база транзакций криптовалют открыта, что делает возможным проведение AML-аналитики (Anti-money laundering) с целью выявления нелегальных транзакций.

Данная работа посвящена развитию подходов решения задач AML-аналитики – исследованию возможности объединения структуры графовых нейронных сетей (Graph Neural Network, GNN) с алгоритмом случайного леса (random forest, RF) на примере задачи классификации транзакций биткойна.

**Данные.** В статье [1] анонсирован открытый набор данных – Elliptic Data Set [2]: граф с  $n=203\,769$  вершинами, соответствующих транзакциям биткойна, и 234 355 рёбер, соответствующих потокам биткойна. Каждая вершина имеет 166 признаков и размечена на классы: 1 – нелегальные (4 545 вершин), 2 – легальные (42 019 вершин), *unknown* – неизвестные. Отношение миноритарного класса к мажоритарному составляет: 0,1, что говорит о несбалансированности выборки. Также набор данных содержит 49 различных временных шагов, распределённых равномерно с интервалом около двух недель, каждый шаг содержит одну компоненту связности графа, несвязанную с другими временными шагами, на одном шаге содержатся транзакции, которые были зафиксированы с интервалом не более трёх часов друг от друга.

**Используемые структуры и алгоритмы.** В данной работе предлагается несколько вариантов структуры GNN для решения задачи классификации: свёрточные графовые сети (Graph Convolution Network, GCN), графовые сети внимания (Graph Attention Networks, GATs).

Основной принцип GNN заключается в реализации некоторой функции  $\tau$ , отображающей граф  $G$  и один из его узлов в  $m$ -размерное Евклидово пространство [3]:  $\tau(G, i) \in \mathbf{R}^m, i = 1, 2, \dots, n$ . В случае набора данных Elliptic Data Set мы решаем задачу бинарной классификации: каждой  $i$ -ой вершине входного графа  $G$  необходимо приписать метку: 1 – нелегальная или 2 – легальная.

При обучении GNN в общем случае применяется какая-либо вариация алгоритма прямого распространения, основа которого заключается в том, что на каждой итерации алгоритма вершины графа агрегируют информацию о своих соседях соответствующего уровня. Таким образом, по мере повторения этого процесса вершины получают всё больше информации от более удалённых вершин. Информация о соседях некоторой вершины поступает в функцию агрегации (1), где по некоторому правилу суммируются векторы состояния вершин. Функция агрегации имеет вид:

$$AGG\left(\left\{h_u^{(k-1)}\right\}_{u \in N(v)}\right) = f\left(h_u^{(k-1)}\right), \quad (1)$$

где  $h_u^{(k-1)}$  – вектор признаков вершины  $u$  на  $(k-1)$  шаге,  $N(v)$  – множество соседей вершины  $v$ ,  $f$  – заданное правило суммирования векторов состояния. Затем полученные значения передаются в функцию обновления состояния вершины  $v$  (2), которая по некоторому правилу, изменяет вектор состояния данной вершины:

$$h_v^{(k)} = UPDATE^{(k)}\left(h_v^{(k-1)}, AGG^{(k)}\left(\left\{h_u^{(k-1)}\right\}_{u \in N(v)}\right)\right). \quad (2)$$

На выходе алгоритма получают граф с исходной топологией, но с дополнительными признаками вершин, которые определяют принадлежность вершины к какому-либо классу [4].

Кратко опишем особенности использованных моделей нейросетей. GCN включают свёрточные графовые слои для уменьшения пространства признаков входного графа. Последовательное применение нескольких таких слоёв позволяет в конечном итоге получить граф с пространством признаков требуемой, в рамках задачи, размерности. Таким образом, данный тип графовых нейронных сетей позволяет обрабатывать большие графы, а также графы, вершины или рёбра которых имеют большое количество признаков. Архитектура GAT позволяет использовать модели внимания для решения задач на графах. Сети GAT содержат в себе графовые слои внимания (graph attentional layers), которые производят агрегацию состояний соседей вершины с учётом коэффициентов внимания  $\alpha$  [5]:

$$AGG\left(\left\{h_u^{(k-1)}\right\}_{u \in N(v)}\right) = \sum_{u \in N(v)} \alpha_{u,v}^{(k-1)} h_u^{(k-1)}.$$

**Вычислительные эксперименты и их обсуждение.** Согласно экспериментам [1] алгоритм RF превосходит по точности GCN: 95,6% и 81,2% соответственно. Однако в таком случае не используется вся информация, хранящаяся в структуре графа. Поэтому было выдвинуто предположение о возможном повышении эффективности классификации GCN путём объединения структуры сети с алгоритмом RF. В качестве входных данных был выбран 27 временной шаг из набора Elliptic Data Set [2]. Граф с 1653 вершинами и 1717 рёбрами разделён случайным образом на обучающую и валидационную выборки в соотношении 85 к 15. В первом случае, проводилась классификация при помощи свёрточной GNN, состоящей из трёх слоёв. Первый слой сворачивает пространство признаков до 128, второй до 2 и третий



до 1 – класса транзакции. В качестве функции активации в GCN используется полулинейный элемент – ReLU, для всех слоёв, кроме последнего, где используется логистическая функция – сигмоида. Использование логистической функции на последнем слое GCN позволяет привести значения признаков всех вершин к значению от 0 до 1, после чего к данному вектору применяется алгоритм случайного леса для определения класса вершин – 1 или 2. Данная конфигурация сети за 100 эпох обучения показала точность: 98,6 % на этапе обучения, 96,8 % на этапе валидации. Эти результаты действительно имеют более высокую точность, относительно классификации только случайным лесом или только GCN.

Следующая серия экспериментов была посвящена классификации при помощи GAT сети состоящей из трёх графовых слоёв внимания. В этой конфигурации сети используется та же комбинация функций активации и алгоритма случайного леса, что и в случае с GCN. Данная модель за 100 эпох обучения показала точность 98,9 % на обучающей выборке и 97,6 % на валидационной. Результаты классификации приведены в Таблице 1: модель с применением сети GAT показывает меньшее число ошибок в случаях определения легальных транзакций. В остальном представленные модели дают близкие результаты.

Таблица 1

Матрицы ошибок

Класс	Этап обучения				Этап валидации			
	GCN		GAT		GCN		GAT	
	1	2	1	2	1	2	1	2
1	63	9	62	10	10	3	10	3
2	66	1267	7	1326	9	226	3	232
	GCN+RF		GAT+RF		GCN+RF		GAT+RF	
1	66	6	66	6	10	3	10	3
2	13	1320	9	1324	5	230	3	232

**Заключение.** Проведённые нами вычислительные эксперименты подтвердили предположение о возможности повышении точности классификации при использовании комбинации GNN с алгоритмом случайного леса. При классификации графовых структур, в том числе AML-анализе, важно использовать всю информацию, отражённую в графе, не ограничиваясь использованием пространства признаков.

*Финансирование проекта осуществлялось Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-10-2021-093; Проект FMF-RND-2122).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weber M. et. al. (2019), Anti-Money Laundering in Bitcoin: Experimenting with Graph Convolutional Networks for Financial Forensics. KDD '19 Workshop on Anomaly Detection in Finance, New York, USA, 7 pp.
2. Elliptic Data Set [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.kaggle.com/datasets/ellipticco/elliptic-data-set>, свободный (дата обращения: 19.03.2023)
3. Scarselli F. et. al. (2009) The graph neural network model, IEEE Transactions on Neural Networks, 20(1), pp. 61-80.
4. Hamilton W.L. et. al. (2017) Inductive Representation Learning on Large Graphs. NIPS'17: Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems, pp. 1025–1035
5. Veličković P. et. al. (2017) Graph Attention Networks. 6th International Conference on Learning Representations.

УДК 51-77

**КЛАСС ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**Д.А. Редько<sup>1</sup>Научный руководитель: доцент к.ф.-м.н., М.Е. Семенов<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

<sup>2</sup>Научно-технологический университет «Сириус»,

Россия, Краснодарский край, пгт Сириус, проспект Олимпийский, д. 1, 354340

E-mail: dar27@tpu.ru

**CLASS FOR NUMERICAL SOLUTION STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS**D.A. Redko<sup>1</sup>Scientific Supervisor: Assoc. Prof. PhD. M.E. Semenov<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050<sup>2</sup>Sirius University of Science and Technology, Russia, Krasnodar region, Sirius Olimpiyskiy str., .1, 354340

E-mail: dar27@tpu.ru

**Abstract.** Numerical solutions of stochastic differential equations play a key role in the tasks of the financial industry. In this paper, the numerical methods of Euler and Milstein are analyzed for different discretization steps. The results obtained for the synthetic example are compared with the true value. The class `sde_sim` has been implemented in Python.

**Введение.** Стохастический анализ и теория случайных процессов являются тенденцией развития экономической сферы деятельности человека. Одной из ключевых проблем финансовой аналитики является нахождение решений стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) разной структуры, в том числе не имеющих аналитического решения. Для этого есть достаточно широкий набор программных инструментов: а) библиотека Quantlib (языки реализации R, C++, Python) – содержит высокоуровневые инструменты (готовые экономические модели, базовые и экзотические опционы и др.) для решения разнообразных финансовых прикладных задач. Численные методы в явном виде не реализованы [1], б) библиотека `sde` [2] – реализована только на языке R, предоставляет широкий набор разнообразных методов, для использования `sde` с Python существует пользовательская библиотека `gru2`, однако она доступна только на Linux [3], в) библиотека `Rumle` (Python) – имеет широкий набор инструментов, в том числе методы для оценки параметров модели и классические численные методы Эйлера и Мильштейна, однако она находится в стадии разработки, на данном этапе имеет документацию начального уровня [4].

Цель работы – создание универсальной библиотеки для реализации численных методов решения СДУ на языке Python.

**Теоретическая необходимость.** Идея численных методов решения СДУ заключается в обобщении техники решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для обеспечения

стохастической динамики. Будем использовать явные формулы для численного моделирования случайного процесса методом Эйлера [5]:

$$X_{t+dt} = X_t + b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)(W_{t+dt} - W_t) \quad (1)$$

Схема Мильштейна использует лемму Ито для повышения точности аппроксимации путем добавления члена второго порядка. Обозначим через  $\sigma_x$  частную производную  $\sigma(t, x)$  по  $x$ , приближение Мильштейна выглядит [5]:

$$X_{t+dt} = X_t + b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)(W_{t+dt} - W_t) + \frac{1}{2}\sigma(t, X_t)\sigma_x(t, X_t)((W_{t+dt} - W_t)^2 - dt) \quad (2)$$

Существенным недостатком моделей (1)-(2) являются постоянные параметры волатильности  $\sigma$  и смещения  $b$ , то есть модель не предполагает длительного использования и требует постоянной корректировки. Для решения этой проблемы разработаны различные модели динамической корректировки волатильности. В данной работе рассмотрен простейший метод предкорректировки детерминированной функцией. Будем предполагать, что волатильность изменяется как функция с заданными параметрами  $\alpha$  и  $\eta$ .

**Описание класса.** Реализованный на Python класс `sde_sim` позволяет аппроксимировать методами Эйлера и Мильштейна процессы вида:

$$dX_t = X_t(\mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t) \quad (3)$$

Описание принимаемых параметров методами класса:  $t_0$  – начальное время,  $T$  – конечное время,  $X_0$  – начальный момент времени,  $N$  – количество интервалов,  $\delta$  – шаг интегрирования,  $\text{drift}$  – смещение,  $\text{sigma}$  – волатильность (функция дисперсии),  $\text{sigma}_x$  – производная от функции дисперсии, если  $\text{sigma}$  не константа,  $\alpha$ ,  $\eta$  – параметры для `pred_corr`, `pred_corr` – булевская переменная для динамического изменения параметров модели.

**Вычислительные эксперименты.** Для вычислительных экспериментов будем моделировать процесс вида:

$$X(t) = \exp\left(\left(\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right)t\right), \text{ при } \theta_1 = 2, \theta_2 = 0,5, X(0)=1. \quad (4)$$

Из теории известно, что у численного метода Эйлера погрешность накапливалась с количеством итераций. Таким образом, убедимся в том, что схема Мильштейна превосходит схему Эйлера по сходимости на примере геометрического броуновского движения. Будем действовать следующим образом:

1. Смоделируем траектории броуновского движения уменьшая шаг и увеличивая количество разбиений с использованием броуновского моста.
2. Построим траекторию геометрического броуновского движения как по схемам Эйлера и Мильштейна по полученному процессу.
3. Сравним истинные значения процесса  $X$  в момент времени  $T$  с численными результатами вычислительных схем.

Будем использовать алгоритм броуновского моста на интервале  $[0;1]$ , который разобьем на  $N$  интервалов:  $dt=1/N$ . Таким образом, получим  $N+1$  значение в момент времени  $t$ . На рис. 1 приведены траектории винеровского процесса (4) в зависимости от  $N$  для двух вычислительных схем. На рис. 2

приведено сравнение численных результатов решения на правой границе интервала интегрирования  $T = 1$  для различных  $N$  с аналитическим решением (4):  $X(1)=e^{1.875}$ .

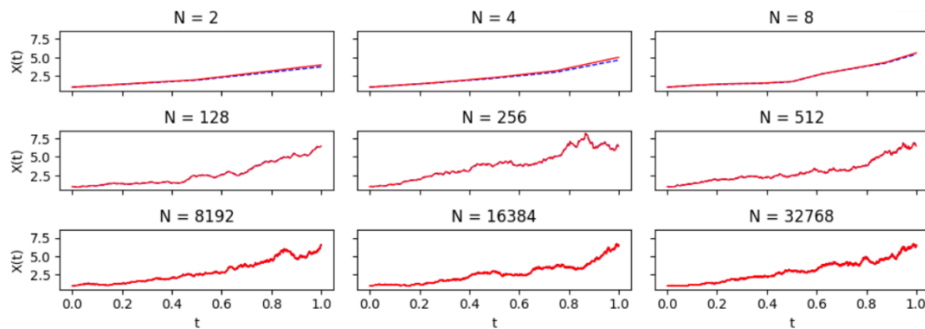


Рис. 1. Реализация винеровского процесса (4) для различных значений  $N$ : схема Эйлера (пунктирная линия), схема Мильштейна (сплошная линия)

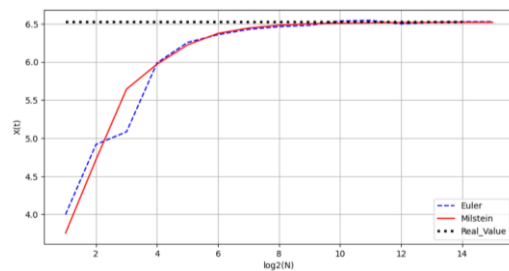


Рис. 2. Сходимость численных решений к аналитическому решению с ростом  $N$

**Заключение.** Нахождение численных решений стохастических дифференциальных уравнений является одной из ключевых задач финансовой математики. Реализованный класс `sde_sim` предоставляет исследователю шаблон, по которому легко описывать однотипные объекты – дальнейшее развитие работы планируется в оформлении библиотеки и расширения доступного набора методов (например, предиктор-корректор, метод Клодена) для различных диффузионных процессов (например, Орнштейн-Уленбек, Кокс-Интерсолл-Росс). Программный код размещен по адресу <https://github.com/DmitryRedko/SDE>, доступ предоставляется по запросу.

Финансирование проекта осуществлялось Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-10-2021-093; Проект FMF-RND-2122).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. QuantLib: a free/open-source library for quantitative finance [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.quantlib.org/> (дата обращения: 13.03.2023).
2. CRAN // sde: Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://cran.r-project.org/web/packages/sde/index.html> (дата обращения: 08.03.2023).
3. rpy2 documentation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://rpy2.github.io/> (дата обращения: 12.03.2023).
4. Pymle // Awesome Open Source [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://awesomeopensource.com/project/jkirkby3/pymle> (дата обращения: 15.03.2023).
5. Stefano M. Iacus Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations. – Milano Italy: University of Milan, 2008. – 300 с.

УДК 519.688

**ИССЛЕДОВАНИЕ МИОКАРДИАЛЬНОЙ ПЕРФУЗИИ МЕТОДАМИ МАШИННОГО  
ОБУЧЕНИЯ И ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**

А.С. Кандыбо, А.В. Мочула

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Б.С. Мерзликін

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

НИИ кардиологии Томский национальный исследовательский медицинский центр,

Россия, г. Томск, ул. Киевская 111А

E-mail: [ask161@tpu.ru](mailto:ask161@tpu.ru)

**RESEARCH OF MYOCARDIAL PERFUSION BY MACHINE LEARNING AND ARTIFICIAL  
INTELLIGENCE METHODS**

A.S. Kandybo, A.V. Mochula

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD, B.S. Merzlikin

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

Tomsk National Research Medical Center, Russia, Tomsk, Kievskaya str., 111a, 634012

E-mail: [ask161@tpu.ru](mailto:ask161@tpu.ru)

***Abstract.** This report outlines the idea of applying machine learning methods in nuclear medicine to analyze myocardial perfusion. This work includes the classification of patients into healthy and patients with abnormalities; classification of the disease of an unhealthy patient into ischemia and myocardial infarction; segmentation of the affected area of the heart on the polar map of myocardial perfusion. This article also presents some of the results of the initial research and the results of the first stage of work.*

**Введение.** На сегодняшний день область применения методов машинного обучения постоянно расширяется, и связано это с автоматизацией большого количества процессов. Любой процесс, подразумевающий последовательное выполнение одинаковых действий, в той или иной степени будет рано или поздно автоматизирован. Основной целью автоматизации является повышение качества исполнения процесса путем минимизации рисков, связанных с человеческим фактором или же просто ускорение выполнения процесса.

Очевидно, что медицина является одной из тех сфер деятельности, которая требует максимальной точности исследований, ведь от их корректности зависит правильность поставленного диагноза и здоровье пациента. С помощью методов машинного обучения можно автоматизировать ряд процедур, что позволит сократить количество ошибок, связанные с человеческим фактором, а также освободить специалиста от рутинной работы и дать возможность сконцентрироваться на более важной работе.

В данной работе будут описаны исследования, проведенные совместно с НИИ кардиологии Томского НИМЦ в области лучевой диагностики, а конкретнее – анализ перфузионной сцинтиграфии миокарда [2] методами машинного обучения.

Цель работы – создание инструмента для анализа перфузионных карт пациентов на основе данных однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (ОФЭКТ) миокарда и классификации их на норму, инфаркт миокарда и ишемию. Для классификации будут использованы полярные карты – одна из форм представления томосцинтиграммы.

**Экспериментальная часть.** В ходе проделанной работы на данный момент решена задача классификации пациентов на здоровых и пациентов с нарушенной миокардиальной перфузией. Ниже будет описан ход решения данной задачи.

Первая проблема, которую было необходимо решить – собрать необходимое количество данных, которых бы хватило для обучения как моделей нейронных сетей, так и других алгоритмов машинного обучения. Сбор данных проводился на станции для ядерных исследований *Xeleris 4 DR* [1]. Процесс сбора информации занимает много времени, поэтому на сегодняшний день собрано и размечено всего 196 изображений. Для данных, полученных после проведения ОФЭКТ миокарда, требуется дополнительная обработка, выполняемая на заранее анонимизированной выборке пациентов непосредственно на станции *Xeleris 4 DR*, которая проводилась под контролем опытных врачей-радиологов, имеющих опыт в области оценки перфузии миокарда. Она включает в себя ряд этапов:

1. Итеративная реконструкция [4];
2. Коррекция аттенюации [3];
3. Выделение сердца в трех проекциях по зарегистрированным излучениям;
4. Построение полярных карт;

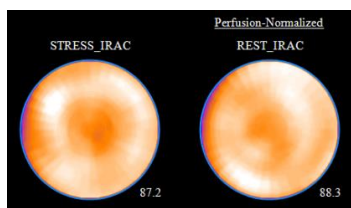


Рис. 1. Полярные карта перфузии при нагрузке (слева) и в покое (справа)

После получения изображений полярных карт (рис 1) для каждой карты (в нагрузке и в покое) проводилась следующая их обработка:

1. Изображение обрезалось по краю;
2. Край полярной карты и задний фон был закрасен в черный цвет;
3. Дальнейшие операции проводились для каждого цветового канала;
4. Изображение разрезалось на 5 вертикальных и 5 горизонтальных полос (рис 2.а);
5. Дополнительно изображение разрезалось на 4 кольца;
6. Для каждой части (полосы и кольца) считались среднее значение и среднеквадратическое отклонение (исключая из рассмотрения черные точки).

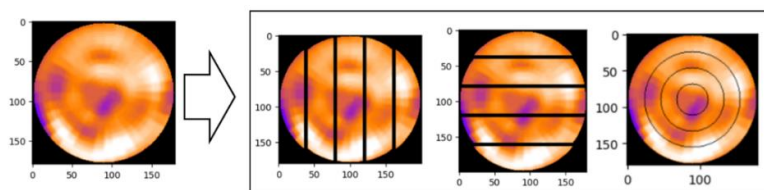


Рис. 2. Выделение признаков из перфузионной карты

Таким образом было получено 84 числовых признаков для каждой полярной карты. Далее было необходимо отобрать из вычисленных признаков наиболее информативные. Для этого был использован F-критерий Фишера для каждого признака, на основании которого было отобрано 10 лучших признаков. Врачами радиологами была предоставлена информация о наличии в каждом случае нормальной или нарушенной (инфаркт или ишемия) миокардиальной перфузии.

На полученных после обработки данных была обучена первая модель – случайный лес. Для того, чтобы получить адекватную оценку модели была использована кросс-валидация с 5 блоками. В таблице 1 представлены результаты тестирования модели.

На тех же изображениях перфузионных карт, была обучена предобученная на ImageNet нейронные сети ResNet50 и ResNet152, результаты тестирования модели приведены в таблице 1.

**Результаты.** В ходе проделанной работы был обучен ряд моделей с разными параметрами, лучшие результаты которых приведены в таблице 1. Стоит отметить, что случайных лес показал наилучшие значения метрик в отличии от нейронных сетей. При решении задачи классификации пациентов на больных и здоровых, важно минимизировать ложноотрицательные предсказания, за это отвечает метрика  $recall=0.92$ , что является хорошим результатом на такой небольшой выборке.

При обучении нейронных сетей возникли сложности с объемом данных – их слишком мало и модели быстро переобучались, поэтому с помощью нейронных сетей не удалось достигнуть высоких результатов.

Таблица 1

Результаты тестирования моделей

Модель	<i>accuracy</i>	<i>precision</i>	<i>F1-score</i>	<i>recall</i>	Параметры
Random Forest Classifier	0,9	0,91	0,92	0,93	$max\_depth = 4, n\_estimators = 100$
CatBoost	0,9	0,91	0,92	0,94	$iterations = 700, max\_depth = 2$ $lr = 0.003$
ResNet50	0,88	0,92	0,9	0,89	$n\_epoch = 150$ $optimizer = Adam(lr = 0.003)$ $loss = binary\_crossentropy$ $pretrained\_weights = ImageNet$
ResNet152	0,85	0,96	0,88	0,82	$n\_epoch = 50$ $optimizer = Adam(lr = 0.003)$ $loss = binary\_crossentropy$

**Заключение.** После обучения ряда моделей была построена сводная таблица лучших экспериментов (таблица 1). Из которой можно сделать следующий вывод – лучшей моделью для классификации полярных карт миокарда является модель, обученная алгоритмом CatBoost, которая показала  $recall = 0.94$ . Это говорит о том, что среди всех нездоровых пациентов алгоритм корректно распознал 94 % из них. А  $precision = 0.91$  говорит о том, что среди всех пациентов, которых модель назвала нездоровыми, 91 % действительно являются нездоровыми. Также был разработан интерфейс, позволяющий выбирать изображение с полярными картами перфузии миокарда и получать предсказание модели.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Xeeris 4 DR // GE HealthCare URL: <https://www.gehealthcare.ru/products/molecular-imaging/nuclear-medicine/xeleris-4-dr> (дата обращения: 16.05.2022).
2. Лишманов Ю.Б., Завадовский К.В., Варламова Ю.В. [и др.]. Практическое руководство по сцинтиграфии сердца. – Томск : Издательство научно-технической литературы, 2018. – 168 с.
3. Завадовский К.В., Гуля М.О., Саушкин В.В. [и др.] Совмещенная однофотонная эмиссионная и рентгеновская компьютерная томография сердца: методические аспекты // Вестник рентгенологии и радиологии. – 2016. – Т. 97, № 4. – С. 235-242.
4. Метод итеративной реконструкции // Studme [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://studme.org/339252/meditsina/metod\\_iterativnoy\\_rekonstruktsii](http://studme.org/339252/meditsina/metod_iterativnoy_rekonstruktsii) (дата обращения: 24,12,2022).



УДК: 004.8

**МЕТОДЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В РАДИОМИКЕ ДЛЯ АНАЛИЗА  
КАРДИОВАСКУЛЯРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Д.С. Саматов, А.В. Мочула

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Б.С. Мерзликин

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [denissamatov470@gmail.com](mailto:denissamatov470@gmail.com)

**MACHINE LEARNING METHODS IN RADIOMICS FOR THE ANALYSIS  
OF CARDIOVASCULAR IMAGES**

D.S. Samatov, A.V. Mochula

Scientific Supervisor: Ass. Pr., PhD, B.S. Merzlikin

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: [denissamatov470@gmail.com](mailto:denissamatov470@gmail.com)

***Abstract.** This article outlines the idea of applying machine learning techniques in nuclear medicine to analyze cardiovascular images. The work includes segmentation of the affected area of the heart on the polar map, isolation of radiomic indicators from the ROI, and classification of patients into healthy individuals and patients with abnormalities. The article also presents some of the results of the initial study and the first stage of work.*

**Введение.** Радиомика является относительно молодой областью радиологии [1], которая ставит своей целью извлечение количественных признаков из медицинских изображений [2]. Методы машинного обучения и искусственного интеллекта в широком смысле представляют собой набор вычислительных алгоритмов, которые изучают закономерности в предоставленных данных и позволяют делать прогнозы на основе этих закономерностей. Радиомика, в сочетании с методами машинного обучения и искусственного интеллекта, позволяет не только извлекать численные характеристики медицинских изображений, но и обрабатывать большие объемы полученных данных, которые затруднительны для анализа традиционными статистическими методами [3].

В данной работе рассмотрены примеры извлечения и первичной обработки численных характеристик планиметрических изображений, полученных методом перфузионной сцинтиграфии миокарда [4]. На сегодняшний день, данный метод является наиболее востребованным в ядерной кардиологии. Сбор и первичная обработка медицинских изображений, включая их анонимизацию, были проведены с использованием рабочей станции Xeleris на базе НИИ Кардиологии РАН в г. Томске. Отметим, что ежегодно данное обследование проходят около трёх тысяч человек. В связи с этим существует огромная потребность в систематизации и обработке полученной в ходе исследования информации. Современные методы машинного обучения и искусственного интеллекта позволяют не только провести обработку данной информации, но и разработать на её основе рекомендательную систему для врача-кардиолога, которая будет с высокой долей вероятности определять тяжесть заболевания пациента и рекомендовать дальнейшее инвазивное или неинвазивное лечение, а также проводить исследование влияния лечебной практики на пациентов.

Цель работы – создание на основе методов машинного обучения математической модели, применимой для анализа медицинских изображений на предмет патофизиологических особенностей тканей миокарда. В работе уделяется значительное внимание автоматизации процесса обработки медицинских изображений с помощью методов машинного обучения для извлечения количественной информации из диагностических медицинских изображений, включая сложные и трудно распознаваемые шаблоны.

**Экспериментальная часть.** В ходе выполнения работы была решена задача классификации пациентов на здоровых и с отклонениями. Ниже будет описан ход решения данной задачи.

При выполнении работы был подготовлен набор кардиологических изображений рис.1. На языке программирования Python был создан алгоритм первичной обработки полученного набора изображений, и был создан датасет изображений, представленных на рис.2, для дальнейшего анализа. Была выполнена сегментация области, представляющей интерес, рис.3. Также, при помощи пакета PyRadiomics, были вычислены некоторые радиомические показатели, включая параметры первого порядка, характеристики, основанные на форме, характеристики матрицы совпадения уровня серого, характеристики матрицы длины пробега уровня серого, характеристики матрицы разности соседних оттенков серого, характеристики матрицы зависимости уровня серого.

Таким образом, для каждой полярной карты было получено 105 числовых признаков. Далее был применен метод главных компонент (РСА) для уменьшения размерности признакового пространства. В результате было выбрано 10 новых главных компонент, которые объясняют 90% всей дисперсии.

На полученных после обработки данных была обучена модель – RandomForestClassifier. Для повышения надежности модели была использована кросс-валидация методом k-fold с 5 группами. Результаты тестирования модели представлены в таблице 1.

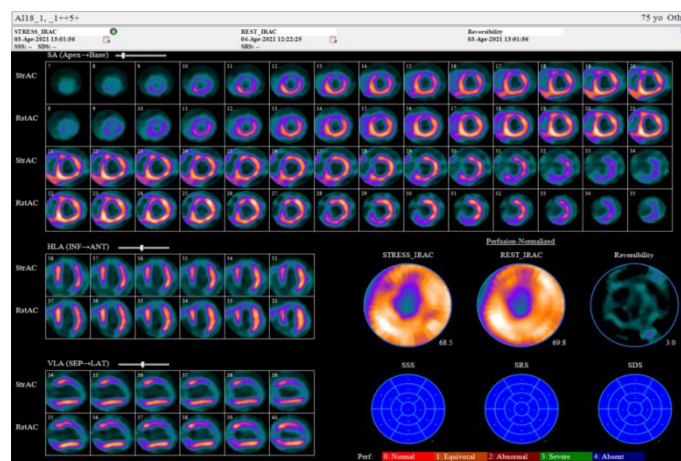


Рис. 1. Перфузионная сцинтиграфия сердца

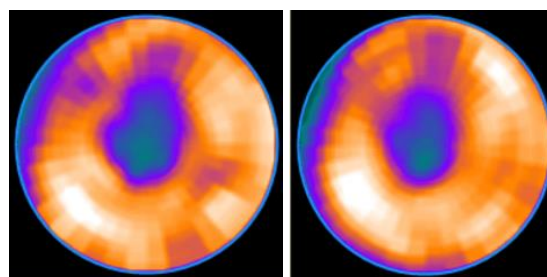


Рис. 2. Планиметрические изображения в покое и под нагрузкой

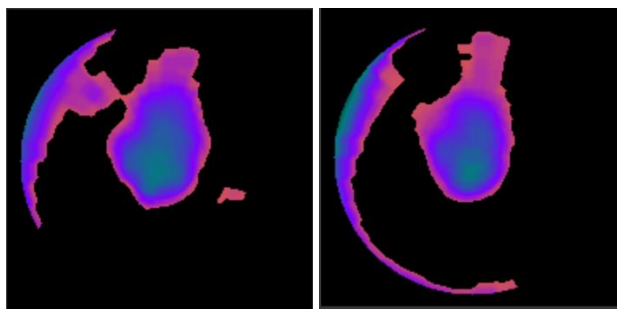


Рис. 3. Сегментация ROI в покое и под нагрузкой

**Результаты.** В ходе проделанной работы был обучен ряд моделей с разными параметрами, лучшие результаты которых представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты тестирования моделей

Модель	<i>accuracy</i>	<i>precision</i>	<i>recall</i>	<i>F1-score</i>
Random Forest Classifier	0,74	0,81	0,81	0,81
Decision Tree Classifier	0,71	0,80	0,69	0,74
Blending ensemble	0,68	0,74	0,81	0,77

**Заключение.** В результате обучения нескольких моделей была построена таблица результатов. Проанализировав полученные значения, можно сделать следующий вывод: лучшей моделью для классификации полярных карт миокарда является модель, обучена алгоритмом RandomForestClassifier.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kocak B., Durmaz E.S., Ates E., Kilickesmez O. Radiomics with artificial intelligence: a practical guide for beginners. Affiliation: Department of Radiology Istanbul Training and Research Hospital, İstanbul, Turkey, 2019 Nov, Vol. 25(6), pp. 485–495.
2. Mayerhoefer M.E., Materka A., Langa G., Häggström I., Szczypiński P., Gibbs P., Cook G. Introduction to Radiomics // Journal of Nuclear Medicine. – 2020. – Vol. 61(4). – P. 488-495.
3. Varghese B.A. , Cen S.Y. , Hwang D.H. , Duddalwar V.A. exture Analysis of Imaging: What Radiologists Need to Know // American Journal of Roentgenology. – 2019. – Vol. 212. – P. 520-528.
4. Hassani C. , Saremi F. , Varghese B.A. , Duddalwar V. Myocardial Radiomics in Cardiac MRI // American Journal of Roentgenology. – 2020. – Vol. 214. – P. 536-545.

УДК 519.622

**РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА  
ГЕНЕТИЧЕСКИМ АЛГОРИТМОМ**И.А. Толстихин

Научный руководитель: к.ф.-м.н. А.Н. Мягкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [iat24@tpu.ru](mailto:iat24@tpu.ru)**SOLVING LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER BY A GENETIC  
ALGORITHM**I.A. Tolstikhin

Scientific Supervisor: PhD. A.N. Myagky

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: [iat24@tpu.ru](mailto:iat24@tpu.ru)

**Abstract.** *The work is devoted to the development, configuration and launch of a genetic algorithm used for the symbolic solution of second-order differential equations with the right side of a special form. The program code is implemented in Python (SymPy library), a comparison is made with the solutions found by mathematical packages. It is shown that the program allows to obtain an analytical solution of the equation in automatic mode without human intervention.*

**Введение.** Основной идеей применения дифференциальных уравнений (ДУ) в различных сферах является правильное описание этих уравнений и нахождение точного решения. На практике зачастую встречаются большое количество сложных задач, которые невозможно решить, опираясь на теорию дифференциальных уравнений. Поэтому существует способ получения решения отличного от аналитического – численный метод. Численные методы часто применяются по причине малых требований к вычислительной технике, а также работают гораздо быстрее классической теории, но при высоких порядках дифференциальных уравнений накапливают большую погрешность решения. По этой причине происходит постоянное совершенствование методов – улучшение старых, генерация новых. Данная работа будет направлена на изучение одного из новых методов решения дифференциальных уравнений с начальными условиями, с применением знаний из другой области науки – информационные технологии. Генетический алгоритм имеет ряд преимуществ в сравнении с другими методами решения ДУ – простота реализации, универсальность метода для применения других задач по оптимизации, устойчивость к входным данным. Целью работы является изучение, разработка и настройка генетического алгоритма программирования для получения символьного решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с начальными условиями.

**Экспериментальная часть.** Поведение системы описывается задачей Коши, имеющей вид:

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), y(a) = y_0, y'(a) = y_1, x \in [a; b]$$

Процесс получения решения поставленной задачи в символьном виде можно рассматривать как сложную оптимизационную процедуру отыскания наименьшего значения функции ошибки на множестве

символьных выражений, где глобальный оптимум равен нулю [1]. Для поиска символьного представления решения целесообразно проводить преобразования бинарных деревьев, представляющих собой математические функции – древовидное генетическое программирование. В рамках данной задачи символьное представление решения задано бинарным деревом, состоящим из элементов функционального множества (+, -, \*, /, sin, cos, exp, ln), и элементов терминального множества (термов x, y, a также вещественных коэффициентов). Блок-схема генетического алгоритма представлена на рисунке 1.

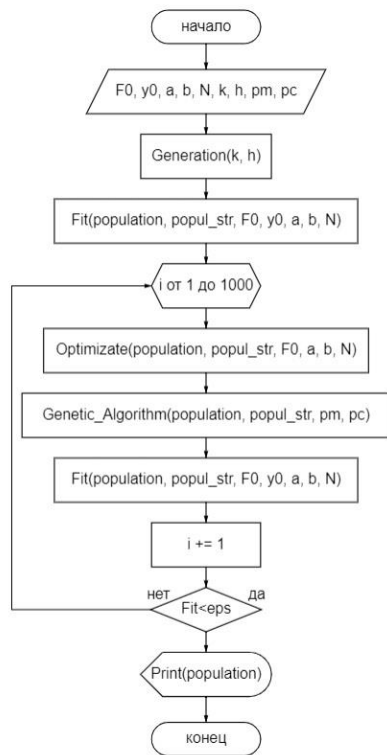


Рис. 1. Блок-схема ГА

категории, должен иметь только одного потомка; узел, содержащий элементы третьей категории, не может иметь потомков (является листом дерева); узел, содержащий открывающуюся скобку, должен иметь потомка только одного потомка, либо из третьей категории, либо из первой; узел, содержащий закрывающуюся скобку, должен иметь только одного потомка из первой категории; количество открывающихся и закрывающихся скобок должно равное количество. Алгоритм построения дерева будет выглядеть следующим образом: корень дерева – выбирается операция случайным образом из любой категории; дальнейшее построение проводится выбором случайных элементов из категорий, подходящих под пункты, описанные выше, с проверкой на глубину дерева. Также оценивается уровень приспособленности каждого индивида. Используемые значения переменных указаны в таблице 2. На третьем этапе запускается ограниченный по времени цикл, настроенный на поиск индивида, являющийся решением задачи Коши с определенной точностью. А именно, производится адаптация каждого индивида из популяции. Индивид, лучше адаптирующийся в условиях поставленной задачи, имеет более высокую пригодность, а, следовательно, более высокую вероятность быть отобранным для порождения потомков. Далее применяются генетические операторы: селекция, рекомбинация (скрещивание), мутация - важный этап генетического алгоритма для схождения к решению. В нашем

На первом этапе пользователь задает необходимые данные для работы алгоритма: дифференциальное уравнение (F0), начальные условия (y0), начальное и конечное значение x (a, b), количество разбиений отрезка для вычисления функции приспособленности (N), количество индивидов в популяции (k), глубина дерева (h), вероятность скрещивания (pc), вероятность мутации (pm). На втором этапе генерируется популяция из индивидов. Начальный индивид формируется следующим образом. В программе указывается «словарь», разделенный на 4 категории: элементы функционального множества, для обозначения операций между терминалами – {+, -, /, \*}; элементы функционального множества – {sin, cos, exp, ln}; элементы терминального множества – {x, C}, где C – вещественный коэффициент из отрезка; уточняющие элементы – {“(”, “)”}. Также примем во внимание следующий ряд правил: узел, содержащий элементы из первой категории, либо будет иметь двух потомков из любой категории, либо одного потомка только из первой категории; узел, содержащий элементы из второй

случае будет использоваться турнирный вид селекции, идея которого состоит в том, что выбираются два случайных индивида и отбирается более пригодный для конкретной задачи (сравниваются значения целевых функций). Скрещивание – операция соединения двух индивидов для передачи друг другу своих частей, в результате чего получается наиболее приспособленные особи. В данной работе использовался одноточечный оператор скрещивания – 2 отобранных индивида разбиваются в случайном узле, при условии, что данные узлы принадлежат элементам из одной категории. Иначе, выбирается другой узел. Если вероятность скрещивания, выбранное пользователем слишком мала, то скрещивания не происходит, а возвращается индивид с лучшей приспособленностью. Мутация – операция случайного изменения одного или нескольких узлов в дереве. Необходима данная операция для разнообразия индивидов и разброса решения по числовому пространству для того, чтобы избежать «застоев» в локальных экстремумах [2].

**Результаты.** Полученные результаты работы модели продемонстрированы в таблице 1.

Таблица 1

## Анализ полученных результатов

№	Задача Коши	Полученное решение	Аналитическое решение	Время, мин	Кол-во поколений
1	$(x^2 + 1)y'' - 2xy' = 0,$ $y(0) = 1, y'(0) = 3, x \in [0;5]$	$y(x) = (x^2 + 2,99)x$	$y(x) = (x^2 + 3)x$	126	754
2	$x^2 y'' + xy' + y = 0$ $y(1) = 3, y'(1) = 4, x \in [0;3]$	$y(x) = 3 \cos(\ln(x)) +$ $+ 4 \sin(\ln(x))$	$y(x) = 3 \cos(\ln(x)) +$ $+ 4 \sin(\ln(x))$	225	1350

Таблица 2

## Значения параметров, используемых в настройке алгоритма.

N	k	h	pm	pc	eps(точность)
100	10	20	0.8	0.8	0.01
Оценка качества индивидов		$Fit = \sum_{i=0}^{N-1}  a_2(x_i)Y''(x_i) + a_1(x_i)Y'(x_i) + a_0(x_i)Y(x_i) - f(x_i)  +$ $+ k0 \sum_{j=0}^{n-1}  Y^{(j)}(x_0) - y_0^{(j)} $			
		где $Y(x)$ – индивид, $k0=100$ – коэффициент штрафа за несоблюдение начальных условий, $n$ – количество начальных условий			

**Заключение.** Прогресс автоматизации процессов, увеличения вычислительной мощности и уменьшения вычислительного времени не стоит на месте. Стандартные методы не всегда могут дать желаемый результат в виду сложного вида уравнения, в то время как генетический алгоритм позволяет получать решение в виде точной формулы, если таковая существует, в виде приближенного символического выражения. Недостаток данного метода заключается во времени сходимости к решению.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спицын В.Г., Цой Ю.Р. Интеллектуальные системы: учебное пособие. – Томск: Издательство ТПУ, 2012. – 176 с.
2. Бураков С.В., Семенкин Е.С. Решение задачи Коши для ОДУ методом генетического программирования // СФУ Сер. Матем. и физ. – 2011. – №1. – С. 61-69.

УДК 519.254

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЛУБОКИХ МОДЕЛЕЙ НЕЙРОСЕТЕЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
НАПРАВЛЕНИЯ БУДУЩЕГО ДВИЖЕНИЯ РИСКОВЫХ КОМПОНЕНТ ПОРТФЕЛЯ АКТИВОВ**

Е.С. Родюкевич

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. О.Л. Крицкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [esr11@tpu.ru](mailto:esr11@tpu.ru)

**USING DEEP NEURAL NETWORK MODELS TO DETERMINE THE FUTURE DIRECTION  
OF RISK PORTFOLIO COMPONENTS**

E.S. Rodyukevich

Scientific Supervisor: Ass. Pr., PhD, O.L. Kritski

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: [esr11@tpu.ru](mailto:esr11@tpu.ru)

***Abstract.** In this article, technical analysis indicators are selected to predict the direction of the cryptocurrency price. We examined a set of technical analysis indicators used as explanatory variables in the current literature and specialized trading websites. Decision trees and deep neural networks were used as a model.*

**Введение.** Финансовые переменные и показатели трудно прогнозировать. Постулат о существовании эффективного рынка, утверждающая, что ни один экономический агент не может постоянно получать более высокую прибыль, чем рынок, остается одним из важнейших доказанных теоретических результатов в финансах [1]. Многочисленные исследователи постоянно пытаются выявить и использовать в своих целях мгновенную неэффективность рынка, предсказать развитие будущих тенденций рынка. В частности, прогнозирование цены и определение направления движения цены в будущем до сих пор является актуальной научной темой. Блокчейн – это цифровая распределенная платежная система, при проверке транзакций в которой не участвуют банки. Распределенная система с равноправными участниками позволяет в любом месте мира отправлять и получать платежи. Криптовалютные платежи существуют исключительно в цифровом виде в онлайн-базе данных, описывающей конкретные транзакции. В данной работе предложена модель, с помощью которой можно построить прогноз поведения цены на один день вперед. Данные для расчета индикаторов технического анализа берутся с сайта Binance [2].

Цель работы. Разработка модели предсказания поведения цены криптовалюты на основе деревьев решений и глубоких нейросетей. В качестве признаков для обучения используются технические индикаторы, часто и широко используемые в научных работах.

**Экспериментальная часть.** Для сбора исторических данных была написана программа сбора данных торгов: цен закрытия, открытия, котировок максимума, минимума и объема торгов за день. В данной работе выбрана пара BTC/USDT, так как она имеет наибольший объем торгов на бирже Binance. Данные собраны за период 01 января 2018 г. по – 25 декабря 2022 г.

Выберем индикаторы технического анализа для проведения исследований при финансовом прогнозировании с применением моделей машинного обучения (табл. 1).

Таблица 1

## Технические индикаторы

Название	Формула
Скользящая средняя	$SMA = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}$
Взвешенная скользящая средняя	$WMA = \frac{\sum_{i=1}^n P_i * W_i}{\sum_{i=1}^n W_i}$
Стохастический осциллятор	$\% K = 100 * \frac{C_0 - \min(L_n)}{\max(H_n) - \min(L_n)}$
Индекс относительной силы	$RSI = 100 - \frac{100}{1 + \frac{Average\_gain}{Average\_loss}}$
Процентный диапазон Вильямса	$\% R = 100 * \frac{C_0 - \max(H_n)}{\max(H_n) - \min(L_n)}$
Индекс разницы	$DI = \frac{C_0 - SMA_n}{100 * SMA_n}$
Ценовой Осциллятор	$PO = EMA(26) - EMA(12)$
Средний истинный диапазон	$ATR_n = \frac{ATR_{n-1}(n-1) + TR}{n}$
Верхняя линия Боллинджера	$Upper\_Band\_Bollinger = SMA_n + m * std$
Нижняя линия Боллинджера	$Lower\_Band\_Bollinger = SMA_n - m * std$

Построим матрицы корреляций между ценами закрытия и индикаторами. Для скользящей средней выбран период в 90 календарных дней. Аналогичные вычисления проделаем для оставшихся индикаторов. Результаты вычислений представлены в табл. 2.

Таблица 2

## Периоды расчета технических индикаторов

Название	Количество календарных дней
Скользящая средняя	90
Взвешенная скользящая средняя	90
Стохастический осциллятор	7
Индекс относительной силы	14
Процентный диапазон Вильямса	7
Индекс разницы	7
Ценовой Осциллятор	26-12
Средний истинный диапазон	20
Верхняя линия Боллинджера	14
Нижняя линия Боллинджера	10
Скользящая средняя	10

В качестве целевой переменной выбрано изменение цены закрытия за день. Дни, с положительными изменениями цен, объединены в класс 1, дни с отрицательными изменениями цен, объединены в класс 0.



**Результаты.** Исходный набор данных разделен на обучающую и тестовую выборку в пропорции 70/30. К данным применены различные классификаторы, построена нейронная сеть. Результаты работы классификаторов представлены в табл. 3.

Таблица 3

*Доля правильно классифицированных направлений изменения цены*

Название	Точность
Дерево решений	0,5445
Метод случайного леса	0,565
Нейронная сеть	0,527

Проведенная бинарная классификация показала удовлетворительные результаты: доля правильно классифицированных направлений движений цен составила более 50 процентов случаев. Дальнейшие улучшения модели с вариацией параметров в методах построения деревьев решений и случайного леса показали, что вариация глубины дерева совпала с оптимальной. При этом для формирования нейронной сети использовались три, пять и семь скрытых слоев с сигмовидной функцией активации. Для обучения сети использовался алгоритм оптимизации Adam [3] с 400 эпохами обучения. Оказалось, что наилучший показатель качества прогноза наблюдался у сети с пятью скрытыми слоями (см. табл. 3). На основе построенных прогнозов на тестовых данных была рассчитана отрицательная доходность, на основе предложенной модели – 62 %, для стратегии купить и держать – 63 %.

**Заключение.** В ходе работы рассмотрен метод предсказания направления цены криптоактива с использованием деревьев решений и нейронной сети. Для дальнейшего улучшения показателя прогноза, необходимо исследовать новые индикаторы технического анализа.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fama E. The Behavior of Stock Market Prices // Journal of Business. – 1964. – Vol. 38. – P. 34-103.
2. Binance: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.binance.com> (дата обращения: 10.03.2023)
3. Kingma, D.P., Ba, J. (2014). Adam: A method for stochastic optimization. arxiv preprint arxiv:1412.6980. from <http://arxiv.org/abs/1412.6980> (Дата обращения: 10.03.2023)

УДК 51:003.26

**ШИФРОВАНИЕ ТЕКСТОВЫХ ДАННЫХ АЛГОРИТМОМ ELLIPTIC CURVE CRYPTOGRAPHY**М.А. Бурнин

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. О.Л. Крицкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [mab54@tpu.ru](mailto:mab54@tpu.ru)**ENCRYPTION OF TEXT DATA BY ELLIPTIC CURVE CRYPTOGRAPHY ALGORITHM**M.A. Burnin

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD. O.L. Kritsky

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: [mab54@tpu.ru](mailto:mab54@tpu.ru)

**Abstract.** *In this work, you have constructed a program that allows us to encrypt a message based on some initial code. We get this code according to the algorithm based on elliptic curves. It is agreed between the two parties and cannot be established based on the data that we transmitted through an open communication channel.*

**Введение.** В настоящее время данные которые вы оставляете в интернете тщательно собирают, и речь идёт не только о cookie файлах, зачастую личная переписка оказывается под угрозой вскрытия, если вы передаёте какую-то важную информацию, то можете перестраховаться и зашифровать её<sup>1</sup>. Данная работа основана на эллиптических кривых, которые ограничены вещественными полями вводимой информации. Рассмотрим понятие эллиптических кривых [1].

**Теоретические основы.** Кривые вида  $y^2 = x^3 + ax + b$ , где  $4a^3 + 27b^2 \neq 0$  называются эллиптическими. Можно определить абелеву группу для эллиптических кривых [1, 2]:

- элементы группы — это точки эллиптической кривой;
- единичный элемент — это бесконечно удалённая точка 0;
- обратная величина точки  $P$  — это точка, симметричная относительно оси  $x$ ;
- сумма трёх ненулевых точек  $P, Q, R$ , лежащих на одной прямой равна  $P + Q + R = 0$ .

Есть возможность определить скалярное умножение:  $nP = P + P + \dots + P$  ( $n$  раз). Которое можно быстро посчитать по алгоритму удвоения-сложения. Далее будем работать в поле целых чисел по модулю  $p$ , где  $p$  — простое число. Можно определить деление по модулю  $p: \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ , где  $(y^{-1} \cdot y) \bmod p = 1$ .

Алгебраическая сумма в ограниченном поле:

$$x_R = (m^2 - x_P - x_Q) \bmod p, y_R = (y_P + m(x_R - x_P)) \bmod p = (y_Q + m(x_R - x_Q)) \bmod p$$

<sup>1</sup> Материалы исследования автора [Электронный ресурс]. Доступ свободный. Информационная Система: URL: <https://colab.research.google.com/drive/10tu1mATEOPA87Lh35uGcMsGxpLQVOhnh>

Если  $P \neq Q$ , то наклон  $m$  принимает форму:  $m = (y_p - y_Q)(x_p - x_Q)^{-1} \bmod p$

Если  $P = Q$ , то  $m = (3x_p^2 + a)(2y_p)^{-1} \bmod p$

Введём дополнительные понятия и обозначения:

- Количество точек  $N$  в группе называется порядком группы.
- Порядок подгруппы порождённой точкой  $P$  это минимальное  $n$  такое, что  $nP = 0$  ( $n$  – простое число, делитель  $N$ ).
- Кофактор  $h = N/n$  (всегда целое).

Для корректной работы алгоритма осталось выбрать базовую точку  $G$ :

1. Вычисляем порядок эллиптической кривой  $N$  при помощи алгоритма Шуфа.
2. Выбираем порядок  $n$  подгруппы. Чтобы алгоритм сработал, число должно быть простым и быть делителем  $N$ .
3. Вычисляем кофактор  $h = N/n$ .
4. Выбираем случайную точку  $P$ .
5. Вычисляем  $G = hP$ .
6. Если число  $G$  равно 0, то вернёмся к шагу 4. В противном случае мы нашли генератор подгруппы с порядком  $n$  и кофактором  $h$ .

**Алгоритм построения эллиптической кривой Даффи – Хеллмана (ECDH).** Данный алгоритм решает следующую проблему: две стороны (обычно Алиса и Боб) хотят безопасно обмениваться информацией, чтобы третья сторона (посредник, Man In the Middle) мог перехватывать её, но не мог расшифровать.

Сначала Алиса и Боб генерируют собственные закрытые и открытые ключи. У Алисы есть закрытый ключ  $d_A$  и открытый ключ  $H_A = d_A G$ , у Боба есть ключи  $d_B$  и  $H_B = d_B G$ . Затем они обмениваются открытыми ключами  $H_A$  и  $H_B$  по незащищённому каналу. Посредник не может определить закрытые ключи  $d_A$  и  $d_B$ , не решив «сложнейшую» задачу дискретного логарифмирования. После чего Алиса и Боб могут спокойно вычислить  $S$ :

$$S = d_A H_B = d_A (d_B G) = d_B (d_A G) = d_B H_A$$

**Процесс работы программы.** Обе стороны знают общий секрет, теперь этот секрет может послужить ключом в алгоритме шифрования текстовых данных. И это можно сделать следующим

б Теперь это число можно использовать в различных алгоритмах шифрования. Но оно специально было сделано не больше заранее заданного алфавита, чтобы:

*for letter in message:*

*position = alfavit.find(letter)*

*if variant == "Зашифровать":*

*new\_position = (position + key)%leng*

*elif variant == "Расшифровать":*

*new\_position = (position - key)%leng*

*if letter in alfavit:*

*vald = vald + alfavit[new\_position]*

*else:*

*vald = vald + letter //Добавляем символ к строке*

*s*

*e*

*Россия, Томск, 25-28 апреля 2023 г.*

*c*

*r*

Таким образом мы просто сдвигаем символ в сообщении на значение длины ключа в зависимости от того хотим мы сообщение зашифровать или расшифровать.

Чтобы показать связь теории с практикой, необходимо привести функцию скалярного умножения, в которой личному ключу соответствует переменная  $k$ , а публичному переменная  $point$ , умножение происходит по алгоритму удвоения-сложения:

```
def scalar_mult(k, point):
    assert is_on_curve(point)
    if k % curve.n == 0 or point is None:
        return None
    if k < 0:
        # k * point = -k * (-point)
        return scalar_mult(-k, point_neg(point))
    result = None
    addend = point
    while k:
        if k & 1:
            result = point_add(result, addend)
            addend = point_add(addend, addend)
        k >>= 1
    assert is_on_curve(result)
    return result
```

Переменная  $addend$  удваивается после каждой итерации и прибавляется к переменной  $result$ , это происходит только в том случае, если оператор побитового «И» (обозначается «&») возвращает истину. Функция  $is\_on\_curve(point)$  проверяет принадлежность точки к кривой, что помогает определить часто возникающую при работе ошибку, то есть неверно указанные данные

**Заключение.** Рассмотрены положения алгоритма согласования ключей Elliptic Curve Diffie-Hellman по незащищенному каналу связи. Создана программа шифрования текстовых сообщений, она имеет удобный графический интерфейс. Программа позволяет зашифровать/дешифровать сообщение. Время работы программы для шифрования сообщения 256 символов не превосходит 0,007 сек. По сравнению с существующими аналогами моя программа шифрования проще в использовании и интуитивно понятнее.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доступно о криптографии на эллиптических кривых [Электронный ресурс]. – Режим доступа: – <http://habr.com/ru/post/335906/> (28.01.2023)
2. Болотов А.А. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: Алгебраические и алгоритмические основы. – М.: КомКнига, 2006. – 328 с.

УДК 519.163

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ КОМБИНАТОРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ ДЛЯ МНОЖЕСТВ,  
ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЧИСЛАМИ ФУБИНИ**

В.А. Полюга, Ю.В. Шабля

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 40, 634050

E-mail: vadimiuspolyuga@gmail.com

**THE DEVELOPMENT OF COMBINATORIAL GENERATION ALGORITHMS FOR SETS  
DEFINED BY THE FUBINI NUMBERS**

V.A. Polyuga, Y.V. Shablya

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Russia, Tomsk, Lenin str., 40, 634050

E-mail: vadimiuspolyuga@gmail.com

***Abstract.** This article discusses the process of developing combinatorial generation algorithms based on AND/OR tree structures, as well as their software implementation using tree-like data structures on the example of combinatorial sets defined by the Fubini numbers.*

**Введение.** Информация является неотъемлемой частью современного мира и с каждым днем количество хранимой информации только увеличивается. Если информационные объекты имеют иерархическую или рекурсивную структуру описания, то их можно интерпретировать как комбинаторные объекты и применять к ним алгоритмы комбинаторной генерации. Комбинаторная генерация – научное направление, которое совмещает информатику, программирование и комбинаторику, а также изучает алгоритмы, направленные на нумерацию и генерацию элементов комбинаторных множеств [1, 2]. Комбинаторное множество – конечное множество элементов, имеющих определенную структуру, а также алгоритмы построения элементов этого множества. Простейшими примерами комбинаторных множеств являются перестановки и сочетания элементов.

В данной статье рассматривается комбинаторное множество, мощность которого определяется числами Фубини (также известные как упорядоченные числа Белла). В теории чисел и перечислительной комбинаторике упорядоченные числа Фубини подсчитывают количество способов, которыми  $n$  участников могут занять призовые места в соревновании, учитывая возможность ничьих. Также числа Фубини подсчитывают мощность комбинаторных множеств, которые имеют биективное отображение на множества объектов с нестрогим порядком [3, 4]. Значения чисел Фубини формируют целочисленную последовательность A000670 в OEIS [5].

**Экспериментальная часть.** Существует большое количество методов разработки алгоритмов комбинаторной генерации. В этой статье применяется метод разработки алгоритмов комбинаторной генерации на основе деревьев И/ИЛИ [6]. Для использования данного метода нужно представить рассматриваемое комбинаторное множество в виде древовидной структуры И/ИЛИ, общее число вариантов которого совпадает со значением функции мощности рассматриваемого комбинаторного множества.

Особенность структуры дерева И/ИЛИ заключается в наличии двух типов узлов. И-узел подразумевает использование всех своих потомков, в свою очередь ИЛИ-узел означает, что в дальнейшем будет использоваться лишь один потомок узла. Ограничением используемого метода является принадлежность функции мощности комбинаторного объекта к алгебре  $\{N, +, \times, R\}$ . Как следствие, не все способы расчета значений чисел Фубини можно использовать для этого метода.

Каждое  $n$ -е число Фубини может быть задано рекурсивной формулой:

$$F_n = \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot F_{n-k}, \quad F_0 = 1, \quad (1)$$

где для вычисления биномиальных коэффициентов используется следующая формула:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \quad C_n^n = C_n^0 = 1. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) удовлетворяют алгебре  $\{N, +, \times, R\}$ . Следовательно, метод разработки алгоритмов комбинаторной генерации, основанный на деревьях И/ИЛИ, применим к формуле (1).

**Результаты.** На основе формулы (1) была построена структура соответствующего дерева И/ИЛИ (рис. 1). В данной структуре также используется дерево И/ИЛИ для формулы (2).

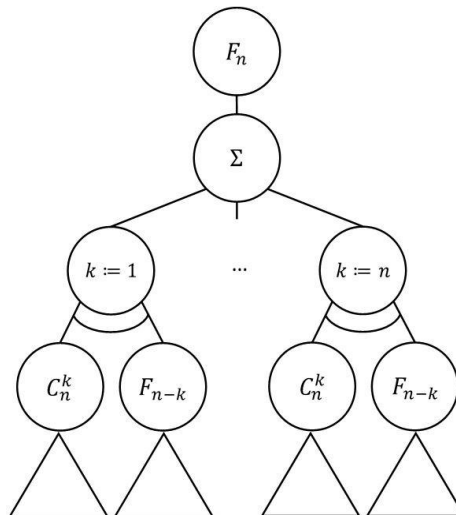


Рис. 1. Дерево И/ИЛИ для Формулы (1):

*ИЛИ-узел – узел дерева без объединения ребер к дочерним узлам; И-узел – узел дерева с объединением ребер к дочерним узлам; рекурсивная композиция деревьев – узел с треугольником*

Для полученного дерева были определены правила биекции между комбинаторным множеством и множеством вариантов дерева И/ИЛИ:

1. Выбранный дочерний элемент ИЛИ-узла определяет количество  $k$  участников, которые вместе занимают  $n$ -е место среди  $n$  участников;
2. Поддерево  $C_n^k$  определяет какие  $k$  участников из  $n$  займут  $n$ -ое место;
3. Поддерево  $F_{n-k}$  определяет места оставшихся  $n - k$  участников.

Используя полученные структуру дерева И/ИЛИ и правила биекции, были разработаны алгоритм ранжирования варианта дерева И/ИЛИ и алгоритм генерации варианта дерева И/ИЛИ по рангу, которые также были реализованы на языке программирования Python (рис. 2, 3).

```

def rank(self):
    if self.n == 0: return 0
    elif self.left_child != 0:
        L1 = self.left_child.rank()
        w1 = Combination().comb(m=self.i, n=self.n)
        L2 = self.right_child.rank()
        sum = 0
        for i in range(1, self.i): sum += Combination().comb(m=i, n=self.n) * self.get_fub_num(self.n - i)
    return int(L1 + w1 * L2 + sum)

```

Рис. 2. Функция ранжирования варианта дерева И/ИЛИ

```

def urank(self, rank, n):
    self.n = n
    if self.n == 0: pass
    else:
        self.i, sum = 1, 0
        while sum + Combination().comb(self.i, self.n) * self.get_fub_num(self.n - self.i) <= rank:
            sum += Combination().comb(self.i, self.n) * self.get_fub_num(self.n - self.i)
            self.i += 1
        rank -= sum
        w1 = Combination().comb(self.i, self.n)
        self.left_child = Combination(n=self.n, m=self.i)
        self.left_child.urank(rank % w1)
        self.right_child = FubiniNumberComb(n=self.n - self.i)
        self.right_child.urank(rank // w1, self.n - self.i)

```

Рис. 3. Функция генерации варианта дерева И/ИЛИ по рангу

**Заключение.** В результате проведенных исследований были получены алгоритмы комбинаторной генерации, а также их программная реализация с помощью древовидных структур данных. Оценка вычислительной сложности алгоритмов равна  $O(n^4)$  при условии вычисления каждого  $F_n$  за  $O(n^3)$  через явную формулу. Полученные алгоритмы можно использовать как для генерации отдельного взятого элемента, чтобы получить определенный элемент комбинаторного множества для оптимизации хранимых данных, так и для последовательной генерации, дающей в результате все элементы комбинаторного множества (полный перебор). В дальнейшем планируется реализовать алгоритмы ранжирования и генерации по рангу на основе формул для чисел Фубини, включающих числа Стирлинга второго рода и числа Эйлера первого рода, а также сравнить скорость работы полученных алгоритмов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 22-71-10052.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Том 4А. Комбинаторные алгоритмы, Часть 1. – М.: Вильямс, 2013. – 960 с.
2. Kreher D.L., Stinson D.R. Combinatorial algorithms: Generation, enumeration, and search – USA: CRC Press, 1999. – 329 p.
3. Sklar A. On the factorization of squarefree integers // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – Vol. 3. – P. 701-705.
4. Ziegler G.M. Lectures on polytopes. – USA: Springer, 2012. – 370 p.
5. Fubini numbers [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://oeis.org/A000670> (дата обращения: 01.03.2023).
6. Shablya Y., Kruchinin D., Kruchinin V. Method for developing combinatorial generation algorithms based on AND/OR trees and its application // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, no. 6. – Article 962.

УДК 519.145

**ЛИНЕЙНЫЕ АВТОТОПИЗМЫ ПОЛУПОЛЕВОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ**

Д.С. Скок

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. О.В. Кравцова

Сибирский федеральный университет Институт математики и фундаментальной информатики

Россия, г. Красноярск, пр. Свободный 79,

E-mail: [skokdarya@yandex.ru](mailto:skokdarya@yandex.ru)**LINEAR AUTOTOPISMS OF THE SEMIFIELD PROJECTIVE PLANE**

D.S. Skok

Scientific Supervisor: Assoc.Prof., Dr. O.V. Kravtsova

School of Mathematics and Computer Science, Russia, Krasnoyarsk, Svobodny Ave. 79,

E-mail: [skokdarya@yandex.ru](mailto:skokdarya@yandex.ru)

**Abstract.** A semifield is a simple ring where the nonzero elements, by multiplication, form a loop. A projective plane is called semifield if its coordinatizing set is a semifield. We consider the problem of classifying finite semifields and the well-known conjecture of Daniel Hughes (1959) on the solvability of the collineation group for a finite non-Desarguesian semifield plane. The information on autotopisms, that is, collineations fixing a triangle, is of great importance. We study autotopisms of even order in the case when the coordinatizing semifield is a two-dimensional vector space over its kernel. The matrix representation of a spread set for the semifield plane is constructed under the condition that the autotopism group contains a dihedral subgroup of order 8. Using computer technology, we found 34 examples of semifield planes of order  $625$  with this condition. It is shown also that the autotopism group of a semifield projective plane of order  $p^{2n}$  with the kernel of order  $p^n$  does not contain a subgroup isomorphic to the quaternion group of order 8 when  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

**Введение.** Проективной плоскостью  $\pi$  называется множество, состоящее из элементов двух типов: точки и прямые, с отношением инцидентности между ними, которое удовлетворяет следующим условиям:

- 1) любые две различные точки инцидентны с единственной прямой;
- 2) любые две различные прямые инцидентны с единственной точкой;
- 3) существуют четыре различные точки такие, что никакие три из них не инцидентны с одной прямой.

Полуполем называется простое кольцо  $(Q, +, \cdot)$ , в котором ненулевые элементы по умножению образуют лупу:

- 1)  $(Q, +)$  – абелева группа с нейтральным элементом 0;
- 2)  $(Q^* = Q \setminus \{0\}, \cdot)$  – лупа;
- 3)  $x(y + z) = xy + xz, (y + z)x = yx + zx \quad \forall x, y, z \in Q$ .

Проективная плоскость называется полуполево́й, если ее координатирующее множество является полуполем. В связи с проблемой классификации конечных полуполей и известной гипотезой Дэниэла Хьюза 1959 года [1] о разрешимости группы коллинеаций (автоморфизмов) конечной недезарговой полуполево́й плоскости большое значение имеет информация об автотопизмах, то есть



коллинеациях, фиксирующих треугольник. Изучается также возможность существования полуполевого проективных плоскостей с условиями на группу автотопизмов. Отсутствие определенных подгрупп автотопизмов может служить базой для продвижения в решении проблемы Хьюза.

**Экспериментальная часть.** Для изучения автотопизмов полуполевого проективной плоскости применяется метод регулярного множества, в случае ранга 2 описанный в [2], подробно также см. [3]. Используя замену базиса линейного пространства и принимая во внимание геометрический смысл автотопизмов, мы записываем их в форме, близкой к жордановой.

Коллинеация порядка 2 проективной плоскости фиксирует подплоскость максимального порядка (*бэровская коллинеация*), либо одну прямую (*ось*) вместе со всеми инцидентными точками и одну точку (*центр*) вместе со всеми инцидентными прямыми (*центральная коллинеация*). Если центр инцидентен оси, то коллинеация называется *эляцией*, в противном случае – *гомологией*. Матричное представление эляций и гомологий полуполевого плоскости хорошо известно.

Мы рассматриваем автотопизмы четного порядка в случае, когда координатизирующее полуполе  $Q$  является двумерным векторным пространством над своим ядром

$$K = \{k \in Q \mid k(ab) = (ka)b \forall a, b \in Q\}$$

Пусть  $\pi$  – полуполевого плоскость порядка  $p^{2n}$ , координатизируемая полуполем  $Q$  с ядром  $K \cong GF(p^n)$ . Здесь  $p$  – простое число, причем  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , Обозначим через  $\Lambda$  группу автотопизмов плоскости  $\pi$ , линейных над  $K$ .

**Результаты.** Описан геометрический смысл линейных автотопизмов порядка 4.

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha \in \Lambda$  – линейный автотопизм порядка 4. Тогда  $p > 2$  и  $\alpha^2$  является центральной коллинеацией.

Доказано, что при  $p = 2$  полуполевого плоскость ранга 2 над ядром не допускает линейных автотопизмов порядка 4.

**Теорема 2.** Если  $\pi$  – полуполевого плоскость порядка  $p^{2n}$  с ядром  $K \cong GF(p^n)$ , где  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , то  $\Lambda$  не содержит подгруппы, изоморфной группе кватернионов  $Q_8$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\pi$  – полуполевого плоскость порядка  $p^{2n}$  с ядром  $K \cong GF(p^n)$ , где  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , то  $\Lambda$  содержит подгруппу  $H$ , изоморфную диэдральной группе порядка 8,  $H \cong D_8$ . Тогда базис четырехмерного линейного пространства над  $GF(p^n)$  может быть выбран так, что  $H = \langle \alpha, \beta \rangle$ ,

$$\alpha = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, i^2 = -1, i \in Z_p$$

регулярное множество плоскости  $\pi$  состоит из матриц вида

$$\theta(v, u) = \begin{pmatrix} m(u) & f(v) \\ v & u \end{pmatrix}, v, u \in GF(p^n),$$

где  $m$  и  $f$  – взаимно однозначные функции на  $GF(p^n)$  с условиями

$$m(m(x)) = x, f(f(x)) = x, \forall x \in GF(p^n).$$

**Заключение.** С использованием метода регулярного множества и матричного представления линейных автотопизмов получено дополнение к результатам Э. Мурхауза [4]. Построено матричное представление регулярного множества плоскости  $\pi$  при условии, что  $\Lambda$  содержит диэдральную подгруппу порядка 8. С применением вычислительной техники найдены 34 примера полуполевых плоскостей порядка 625 с этим условием. Полученные результаты согласуются с представленными в [5, 6]. Изложенный метод допускает дальнейшее обобщение на случай полуполевых плоскостей большего ранга.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hughes D.R., Piper F.C. Projective planes. – Springer-Verlag New-York Inc., 1973.
2. Biliotti M., Jha V., Johnson N.L., Menichetti G. A structural theory for two-dimensional translation planes of order  $q^2$  that admit collineation groups of order  $q^2$  // Geom. Dedicata. 1989. – Vol. 29. – P. 7-43.
3. Кравцова О.В., Скок Д.С. Метод регулярного множества построения конечных квазиполей // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2022. – Т.28, № 1. – С. 164-181
4. Moorhouse G.E.  $PSL(2, q)$  as a collineation group of projective planes of small orders // Geom. Dedicata. – 1989. – Vol. 31, № 1. – P. 63-88.
5. Kravtsova O.V. Dihedral group of order 8 in an autotopism group of a semifield projective plane of odd order // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2022. – Vol.15, no.3, – P. 21-27.
6. Kravtsova O.V. On automorphisms of semifields and semifield planes // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2016. – Vol. 13. – P. 1300-1313.

УДК 330.43

**АНАЛИЗ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ ОТРАСЛИ  
НА ОСНОВЕ МЕТОДА SFA**

Д.М. Иманбаева

Научный руководитель: профессор, д.т.н. А.А. Мицель  
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050  
E-mail: dmi2@tpu.ru

**ANALYSIS OF THE EFFICIENCY ASSESSMENT OF CONSTRUCTION INDUSTRY ENTERPRISES  
BASED ON THE SFA METHOD**

D.M. Imanbayeva

Scientific Supervisor: Prof., Dr., A.A. Mitsel  
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050  
E-mail: dmi2@tpu.ru

***Abstract.** The objects of the study are large enterprises of the construction industry in Russia. The purpose of the work is to analyze the evaluation of the effectiveness of enterprises. Research method: parametric SFA method.*

**Введение.** Строительный сектор реализует расширенное воспроизводство основных средств, обеспечивая, таким образом, общее экономическое развитие страны. Помимо этого, функционирующие производства требуют перманентных текущих, средних и капитальных ремонтов, осуществляемых строительными компаниями. В изучении метода SFA большое значение имеют работы Дж. Эйгнера, К. Ловелла, П. Шмидта [1], Ж. Батгиза и Т. Коэлли. Нельзя оставить без внимания таких авторов, как Д.И.Малахов и Н.П. Пильник [2]. В их труде рассматривается пятнадцать моделей в области SFA-моделирования. По мнению многих современных ученых проблема оценки эффективности изучены достаточно масштабно в научной литературе. В своих научных работах многие авторы в большей мере делают акцент именно на определение эффективности предприятия.

**Экспериментальная часть.** Stochastic Frontier Analysis (SFA) - параметрический метод, с английского метод стохастической границы. Данный метод является одним из наиболее популярных методов для оценки эффективности.

Метод SFA был предложен в двух статьях, которые были опубликованы практически одновременно: Meeusen, van den Broek в 1977 году и Aigner, Lovell, Schmidt в том же году. SFA связывает наличие случайных отклонений от границы эффективности со стохастической природой производственного процесса, например, последствия непреднамеренного исключения значимой переменной из производственной модели, различия производственных условий и т. д. В общем виде оценка эффективности связана с идентификацией производственной функции:

$$y = f(x, \beta) + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – отклонение от граничной оценки выпуска,  $\varepsilon = v - u$  содержащее компоненты  $v$  и  $u$ :

$\nu$  – случайная ошибка, имеющая стандартное нормальное распределение  $(0, \sigma)$  и описывающая влияние на выход неучтенных в модели факторов, действие которых не связано с неэффективностью деятельности;

$\nu$  – неотрицательная, независимая от  $\nu$  случайная величина, которая характеризует неэффективность производства, отражает результаты воздействия на производственный процесс комплекса факторов, обуславливающих его эффективность.

Первый этап работы - определение списка предприятий строительной отрасли для исследования. Для исследования были выбраны восемь крупнейших предприятий: ГК «ЛСР, ГК «ПИК», ООО «Сэтл Групп», ГК «Гранель», ГК «Инград», ГК «Эталон», РГ-Девелопмент, ФСК «Лидер».

В работе также используются микропоказатели предприятий. Они были взяты из отчетов «Бухгалтерский баланс» и «Отчет о финансовых результатах» за 2017-2021 гг. [3]. В таблице 1 приведены обозначения и описание микропоказателей предприятий строительной отрасли.

Таблица 1

## Описание микропоказателей предприятий

Обозначение микропоказателя	Описание микропоказателя
Выручка (Rev)	Среднее значение выручки – отношение общего итогового значения годовой выручки к числу исследуемых малых предприятий за соответствующий год из отчета о прибылях и убытках
ВАБ (FAB)	Отношение показателя «Итого по разделу I (Внеоборотные активы)» к показателю «Баланс» из бухгалтерского баланса предприятий
ОАБ (CAB)	Отношение показателя «Итого по разделу II (Оборотные активы)» к показателю «Баланс» из бухгалтерского баланса предприятий
КРБ (CRB)	Отношение показателя «Итого по разделу III (Капитал и резервы)» к показателю «Баланс» из бухгалтерского баланса предприятий
ДОБ (LLB)	Отношение показателя «Итого по разделу IV (Долгосрочные обязательства)» к показателю «Баланс» из бухгалтерского баланса предприятий
КОБ (SLB)	Отношение показателя «Итого по разделу V (Краткосрочные обязательства)» к показателю «Баланс» из бухгалтерского баланса предприятий

Находим логарифм значений показателей (табл.2). Далее на основе уже новых значений выручки и других исходных значений показателей строим регрессию (рис.1), для примера приводится расчет только для данных за 2019 г.

Таблица 2

## Логарифмы данных

FAB	CAB	CRB	LLB	SLB	Нормировка выручки
-0,164698118	-0,500845399	-0,421928205	-0,42106124	-0,615766071	-0,20228068
-0,248668616	-0,360581149	-0,60645169	-0,523635906	-0,343865466	0
-0,146602031	-0,542885315	-0,475470931	-0,213237975	-1,272599415	-1,866844104
-0,163753272	-0,502901331	-1,444827185	-0,235553528	-0,417105511	-1,967918813
-0,182693897	-0,464209699	-0,271127941	-0,358318726	-1,582492083	-0,384712384
-0,052494731	-0,943651608	-0,669611089	-0,107702802	-2,248082097	-1,383359673
-0,14464092	-0,547808267	-0,437511224	-1,195486409	-0,24330274	-1,683968583
-0,082993558	-0,759576074	-0,982016182	-0,261949176	-0,457557819	-0,938112203

Вывод итогов					
<i>Регрессионная статистика</i>					
Множественный R	0.989021876				
R-квадрат	0.97816427				
Нормированный R-квадрат	0.615716631				
Стандартная ошибка	0.102267303				
Наблюдения	8				
<i>Дисперсионный анализ</i>					
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>
Регрессия	5	1.405526	0.281105	26.8779	0.03625752
Остаток	3	0.031376	0.010459		
Итого	8	1.436902			
<i>Коэффициенты</i>					
Y-пересечение	0	<i>Числитель</i>	<i>Знаменатель</i>	<i>Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>
Переменная X 1	-3.742462766	0.635091	-5.8928	0.00975	-5.76360504
Переменная X 2	-0.597859628	0.34046	-1.75604	0.17734	-1.681355156
Переменная X 3	0.65680795	0.162921	4.031448	0.02744	0.138320317
Переменная X 4	1.014775087	0.181907	5.578538	0.01137	0.435865875
Переменная X 5	0.403433576	0.110269	3.658646	0.03528	0.052509895
					<i>Верхние 95%</i>
					0.05251

Рис. 1. Построение регрессии для данных за 2019 г

Далее, проводятся расчеты в программе Mathcad и строится сравнительный график на основе полученных результатов (рис.2).

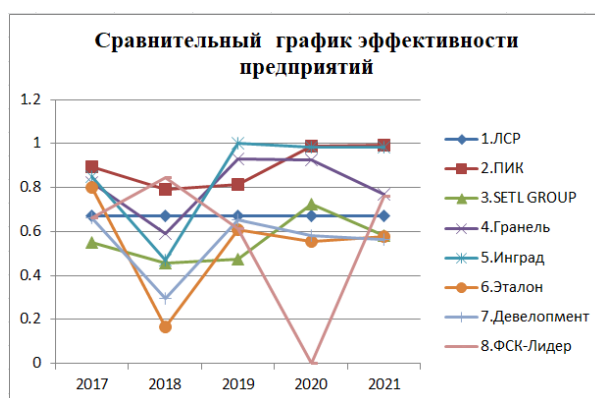


Рис. 2. Сравнительный график

После получения результатов делаем вывод, что, например в 2017 году все предприятия показывают средний уровень эффективности, в 2018 году наблюдаем низкую эффективность у предприятий №3, №5, №6, №7, по сравнению с предыдущими годами в 2019 году эффективность улучшилась у предприятия №5 «Инград» и №4 «Гранель», в 2020 году самую низкую эффективность показало предприятие №8 «ФСК-Лидер», а наилучшими предприятиями в 2020 – 2021 гг. были предприятия №2 «Пик» и №5 «Инград».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aigner D., Schmidt P., Lovell C.A.K. Formulation and Estimation of SFP.
2. Audretsch, D. B., Grillo I., Thurik, A. R. Handbook of Research on Entrepreneurship Policy // Cheltenham, Edward Elgar. – 2007.
3. Государственный информационный ресурс бухгалтерской (финансовой) отчетности: официальный сайт. – Москва. – Обновляется в течение суток. – URL: <https://bo.nalog.ru/> (дата обращения: 22.12.2022)

УДК 658.153

**ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ  
ПРЕДПРИЯТИЙ**И.В. Борисенко

Научный руководитель: профессор, д.т.н. А.А. Мицель  
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050  
E-mail: [ivb25@tpu.ru](mailto:ivb25@tpu.ru)

**SIMULATION MODEL OF INVENTORY MANAGEMENT OF MANUFACTURING ENTERPRISES**I.V. Borisenko

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.A. Mitsel  
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050  
E-mail: [ivb25@tpu.ru](mailto:ivb25@tpu.ru)

**Abstract.** *In this study, we built a simulation model of inventory management with random delivery frequency and random demand. The frequency of supply and demand are set by a random variable with a normal distribution law. In this paper, the random frequency of delivery will be compared with the frequency of delivery calculated by the deterministic Mitsel model.*

**Введение.** В наше время управление запасами на предприятии очень важная составляющая логистики. Целью управления запасами является обеспечение предприятия запасами, которые необходимы для поддержания производственного процесса, с минимальными затратами на их приобретение и доставку. В управление запасами входят такие задачи, как количество поставляемых запасов и сроки размещения следующей поставки.

Цель работы создание имитационной модели управления запасами со случайным спросом и периодом поставки.

Правильно управлять запасами очень важное умение в любой логистической системе. За все время было создано много новых моделей по управлению запасами, например, стохастических или детерминированных методов управления запасами. В монографии [1] Дж. Букана, Э. Кенигсберга описываются основы управления запасами предприятия.

Методы классификации запасов, стратегия создания запасов, а также как правильно пополнять и управлять ими это необходимые знания для осуществления любой производственной деятельности [2]. Проблеме управления запасами посвящено множество российских и зарубежных исследований, что позволило создать целый спектр различно-направленных моделей, учитывающих влияние самых разнообразных факторов. Для управления запасами часто используют основные модели, которые направлены на два основных параметра: интервал времени между заказами и размер заказа [3].

В книге [4] описывается имитационное моделирование систем управления запасами, обширная классификация систем управления запасами и характеристики ее элементов.

**Экспериментальная часть.** Рассмотрим имитационную модель управления запасами с периодической стратегией подачи заявок. Заказы на поставку товара в объеме  $Part$  в данной модели поступают периодически (интервал равен  $I$ ). При этом время доставки будем считать равным нулю. Затраты на поставку  $CP$  пропорциональны объему заказанной партии. Издержки отдельного периода включают штраф за дефицит  $CD$ , затраты на поставку  $CP$  и хранение  $CH$ . Спрос является случайной величиной с нормальным законом распределения (среднее значение равно  $MS$ , среднеквадратическое отклонение –  $SC$ ). Величина неудовлетворенного спроса не учитывается в последующие периоды. Доставка в данной модели осуществляется в начале периода.

Имитационная модель будет немного модифицирована и периодичность поставки будет являться случайной величиной с нормальным законом распределения с такими параметрами, как среднее значение периодичности поставки и среднеквадратическое отклонение периодичности поставки. Имитационная модель, основана на создании запасов за счет того, что докупка необходимых ресурсов осуществляется в объеме их дефицита.

Воспользуемся многопродуктовой моделью управления запасами Мицеля для расчёта периодичности поставки, в которой пополнение недостающих ресурсов производится в объёме, равном дефициту данного ресурса [5]. Данная модель подразумевают докупку только тех товаров, которые необходимы.

**Результаты.** Для расчета по модели Мицеля возьмем данные по приходу сырья и материалов на предприятии ООО «МК Купинский» в ноябре 2021 г. Вычисления проведены в программе Mathcad. Из расчетов по модели Мицеля предполагается периодичность поставок. Это позволяет сэкономить оборотные средства.



Рис. 1. Периодичность поставок каждого вида товара за ноябрь 2021 г.

Реализуем имитационную модель, где спрос и периодичность поставки являются случайной величиной с нормальным законом распределения. Для расчета по данной модели воспользуемся периодами поставки по модели Мицеля и данными по приходу сырья и материалов на предприятие, а также расчет будет произведен только для второго материала.

Имитационная модель строится для каждого материала отдельно, начиная со второго по убыванию стоимости материала, так как первый материал закупается полностью в начале цикла. Берем цикл реализации равный 30 дней. За 30 дней второй материал поставляется 3 раза. Реализуем модель 100 раз и смотрим как меняется периодичность поставки в каждом из трех периодов. Все расчёты проведены в Microsoft Excel. На рисунках 2, 3 и 4 изображены все три периода поставки и как они менялись с каждой реализацией.

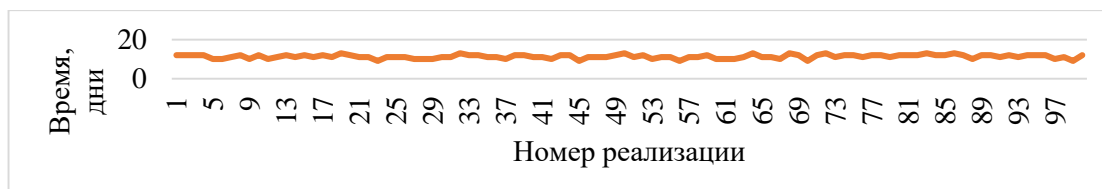


Рис. 2. Первый период поставки

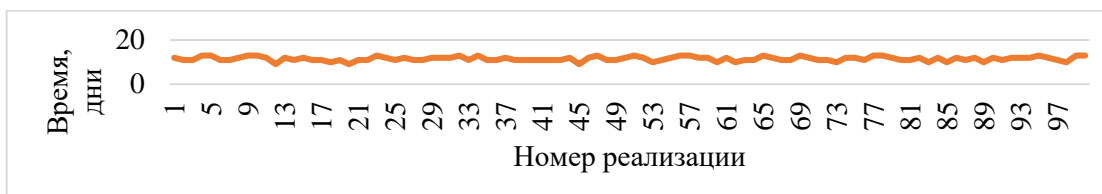


Рис. 3. Второй период поставки

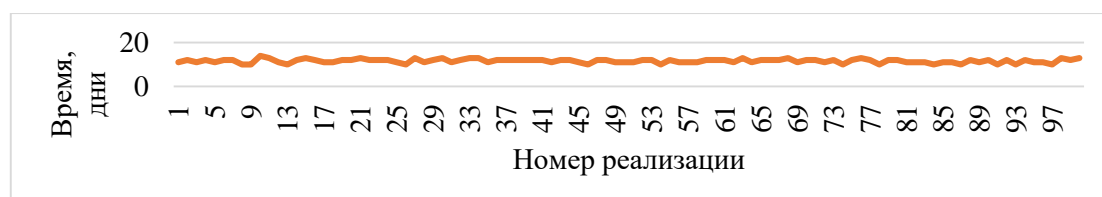


Рис. 4. Третий период поставки

Как видим, иногда материал доставлялся раньше срока, иногда позже, а иногда вовремя. Вычислим среднее значение каждого периода и сравним с периодичностью поставки по модели Мицеля.

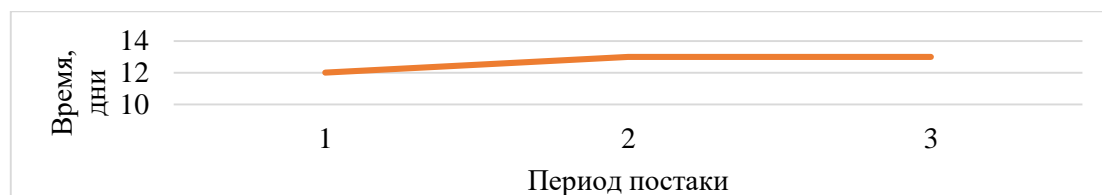


Рис. 5. Среднее значение каждого периода поставки

На рисунке 5 видим, что периодичность поставки во втором и третьем периоде совпадает с периодичностью поставки по модели Мицеля, который равен 13.

**Заключение.** Были проведены расчеты по складским данным производственного предприятия ООО «МК Купинский» за ноябрь 2021 г. детерминированной моделью Мицеля.

Проведено имитационное моделирование по складским данным производственного предприятия ООО «МК Купинский». Имитационная модель со случайным спросом и периодичностью поставки дает экономию средств за счет того, что материал покупается не весь сразу, а в несколько периодов за 30 дней. Также, так как периодичность задавалась случайной величиной, то имитационное моделирование приближено к реальности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букан Дж., Кенигсберг Э. Научное управление запасами: пер. с англ. – Москва: Наука, 1967. – 424 с.
2. Рогов В.А., Чудаков А.Д. Управление запасами: учебное пособие для вузов. – Старый Оскол: ТНТ, 2013. – 215 с.: ил. – Библиогр.: с. 206.



3. Тюхтина А.А. Модели управления запасами: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2017. – 84 с.
4. Мицель А.А., Грибанова Е.Б. Имитационное моделирование экономических процессов в Excel. – Томск: Изд-во ТГУ, 2016. – 115 с.
5. Мицель А.А., Алимханова Д.А. Многопродуктовая модель управления запасами с равной периодичностью поставок // Экономический анализ: теория и практика. – 2015., № 40 (439). – С. 55-66

УДК 658.14:005.52

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛИКВИДНОСТИ  
ОБЪЕКТА ВТОРИЧНОЙ ЖИЛОЙ НЕДВИЖИМОСТИ**М.В. Редькин

Научный руководитель: профессор, д.т.н. А.А. Мицель  
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050  
E-mail: [mrv15@tpu.ru](mailto:mrv15@tpu.ru)

**APPLICATION OF THE METHOD OF ANALYSIS OF THE HIERARCHY TO DETERMINE  
THE LIQUIDITY OF A SECONDARY RESIDENTIAL REAL ESTATE**M.V. Redkin

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.A. Mitsel  
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050  
E-mail: [mvr15@tpu.ru](mailto:mvr15@tpu.ru)

***Abstract.** In the present study, we performed a hierarchical representation of the problem of determining the liquidity of an object of secondary residential real estate, presented possible solution scenarios, then, using the hierarchy analysis method, identified the most successful of them.*

**Введение.** Задача принятия решения стоит перед человеком каждый момент его жизни. Каждое наше действие является выбором между несколькими вариантами. Результат порой оказывается неудовлетворительным вследствие интуитивного решения, которое является скорее психологическим, а не сознательным. Уже вместе с последствиями приходит осознание того, как можно было поступить иначе. Эта проблема стоит перед людьми на протяжении всего их существования. Практически каждый задумывался: «А что было бы, поступи я иначе?» [1]

Для этого существуют численные методы [2].

Используя такие методы, люди, как правило, присваивают числа, которые могут характеризовать все, что угодно. В результате такого рода анализов люди получают числа для каждого из выборов, максимальное или минимальное из которых и будет оптимальным выбором.

Особенно выгодным способом определения наиболее выгодной альтернативы является метод анализа иерархий или метод Саати. Данный метод будет применен для определения ликвидности объекта вторичной жилой недвижимости

**Экспериментальная часть.** Начнем с иерархического представления проблемы.

Глобальная цель была выбрана следующая – повышение покупательской способности граждан в сфере жилой недвижимости.

Была построена иерархия целей (рис. 1). Были построены матрицы сравнений, для второго и третьего уровней иерархий, а затем найдены их локальные приоритеты путем нормализации собственного вектора.

Далее, была проведена проверка согласованности.

С помощью математического пакета Mathcad были найдены максимальные собственные значения, индексы согласованности и отношения согласованности для матриц 2,3 и 4 уровней [3-6].

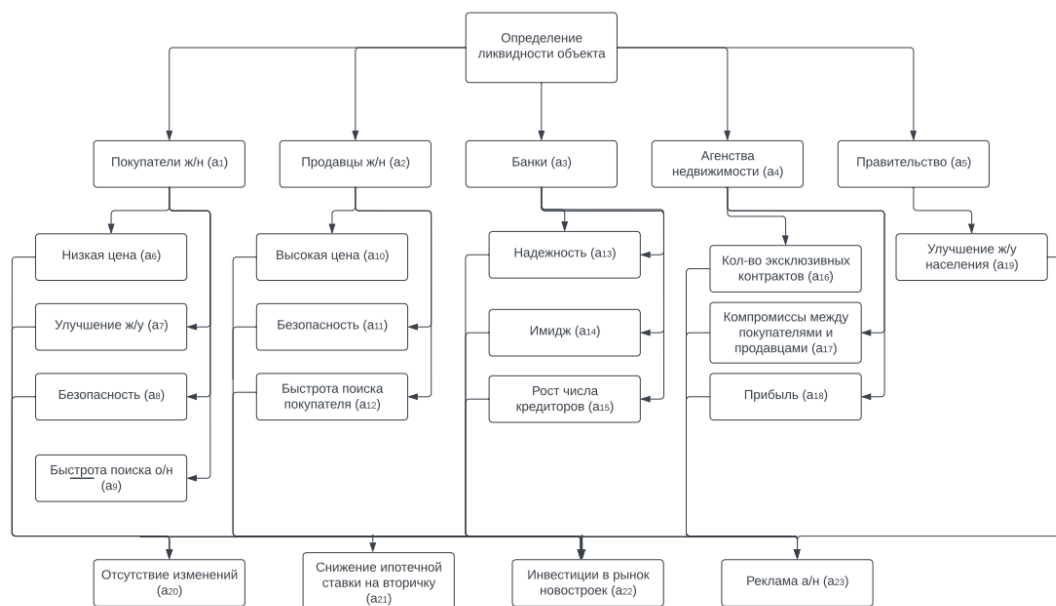


Рис. 1. Иерархия целей

Таблица. 1

Максимальные собственные значения ( $\lambda_{max}$ ), индексы согласованности (ИС) и отношения согласованности (ОС) для матриц 2,3 и 4 уровней

Уровень	Таблица	Разм. Матрицы	$\lambda_{max}$	ИС	ОС
2	г.1	5	5,729	0,18225	0,162723214
3	г.2	4	4,206	0,068666667	0,076296296
	г.3	3	3,136	0,068	0,117241379
	г.4	3	3,029	0,0145	0,025
	г.5	3	3,233	0,1165	0,200862069
	г.6	1	1	0	0
	4	а6	4	4,264	0,088
а7		4	4,264	0,088	0,097777778
а8		4	4	0	0
а9		4	4,663	0,221	0,245555556
а10		4	4,853	0,284333333	0,315925926
а11		4	4	0	0
а12		4	4,637	0,212333333	0,235925926
а13		4	4	0	0
а14		4	4,155	0,051666667	0,057407407
а15		4	4,538	0,179333333	0,199259259
а16		4	4,637	0,212333333	0,235925926
а17		4	4,264	0,088	0,097777778
а18		4	4,701	0,233666667	0,25962963
а19	4	4,324	0,108	0,12	

Локальные приоритеты были собраны в таблицу, а глобальные были вычислены путем матричного умножение соответствующих матриц.

**Результаты.** Были вычислены локальные приоритеты, а затем вычислены глобальные приоритеты путем матричного умножения соответствующих матриц. Сравнив полученные глобальные приоритеты, можно определить, что наиболее успешным сценарием стал сценарий a23 - «Реклама агентствами недвижимости».

Таблица. 2

Глобальные приоритеты

Глобальные приоритеты сценариев			
a20	a21	a22	a23
0,031	0,272	0,256	0,441

**Заключение.** В результате проведенных исследований путем метода анализа иерархий был получен наиболее успешный сценарий для увеличения покупательской способности в сфере жилой недвижимости. Это сценарий, направленный на улучшение рекламных условий у агентств недвижимости, в ходе которого наиболее вероятно удовлетворение целей акторов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Томас Саати. Принятие решений. Метод анализа иерархий. / Перевод с английского Вачнадзе Р.Г. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.
2. Карелова О.Л. Методы поддержки принятия решений: учебник. – Москва : Проспект, 2020. – 144 с.
3. Петров А.Е. Математические модели принятия решений: учеб. -метод. пособие. – Москва : МИСиС, 2018. – 80 с.
4. Захарова А.А., Чернышева Т.Ю., Мицель А.А. Математическое и программное обеспечение стратегических решений в муниципальном управлении: монография; Юргинский технологический институт – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 212 с.
5. Микони С.В. Теория принятия управленческих решений: учеб. пособие. – СПб: Издательство «Лань», 2021 – 448 с.
6. Силич В.А., Силич М.П. Теория систем и системный анализ: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 276 с.

УДК 004.912

**МУЛЬТИКЛАССОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КОРПУСА СМЕШАННЫХ ТЕКСТОВ  
АЛГОРИТМАМИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ**

Е.В. Гузеев

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. М.Е. Семёнов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: evg39@tpu.ru

**MULTI-CLASSIFICATION OF MIXED TEXTS CORPUS BY MACHINE LEARNING ALGORITHMS**

E.V. Guzeev

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Ph.D. M.E. Semenov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: evg39@tpu.ru

**Abstract.** *This paper compares different machine learning algorithms for multiclass classification of mixed texts corpus. The F1-score was used as a quality metric for the algorithm comparison. The algorithms with acceptable quality for the corpus of texts were selected in the process. The dataset includes 7863 rows and 4 features, the gradient boosting showed the best result based on metric  $F1=0.771$ .*

**Введение.** Для решения задач бинарной классификации разработаны алгоритмы машинного обучения, к сожалению, в общем случае эти алгоритмы невозможно обобщить на случай мультиклассовой классификации, более того заранее невозможно определить какой алгоритм будет наилучшим в смысле качества классификации. Кратко приведем описание алгоритмов классификации, которые будем использовать в работе.

Логистическая регрессия при замене сигмоидной функции на функцию softmax может использоваться для задач мультиклассовой классификации. Алгоритм ближайших соседей также справляется с такими типами задач. Для этого необходимо отыскать  $k$ -ближайших соседей данных для входа  $X$  и вернуть класс, к которому принадлежит больше всего данных среди  $k$  [1, 2]. Если предположение о независимости признаков не нарушается, можно использовать полиномиальный наивный байесовский классификатор, который предполагает, что каждый класс имеет свой набор параметров. В алгоритме вычисляется вероятность появления класса в выборке. Если рассмотреть алгоритмы на базе решающих деревьев, то хорошо подходят алгоритм случайного леса и градиентного бустинга. Случайный лес состоит из нескольких деревьев решений, каждое из которых обучается на случайной подвыборке данных. Каждое дерево строится путем разбиения на две или более подгруппы на основе определенного признака. Главная идея градиентного бустинга заключается в том, что каждый следующее решающее дерево, учитывает ошибки предыдущих деревьев и пытается исправить их. Таким образом постепенно улучшается качество предсказаний [2, 3].

Цель работы – проведение сравнительного анализа качества алгоритмов машинного обучения для задачи мультиклассовой классификации. Для достижения цели мы поставили и последовательно решили следующие задачи:

1. Сбор (парсинг) исходных данных.
2. Предварительная обработка данных.
3. Подготовка данных для классификации.
4. Выбор метрики качества для классификации данных.
5. Выбор наилучшего алгоритма на основе метрики качества.

**Экспериментальная часть.** В качестве исходных данных мы использовали набор данных, который собрали на основе данных открытых групп в социальной сети ВК. Для тестирования различных алгоритмов мы сформулировали следующую гипотезу «Пользователь, который интересуется прикладной информатикой частично состоит в сообществах социальной сети по интересам». Эта гипотеза была проверена, на основе группировки и сортировки неуникальных данных, по которым видно, что люди состоят в сообществах так или иначе, связанных с программированием или математикой. Для сбора данных был написан парсер на основе VK API. Для каждого пользователя `user_id` собраны данные по 10 группам, в которых он состоит. Полученная таблица данных включает 7863 строки и 4 столбца: `description` (описание группы), `name` (название группы), `activity` (общая тематика группы), `group_id` (идентификатор группы). Исходные данные имели 54,5 % уникальных данных, после удаления дубликатов осталось 4365 строк. Далее мы провели разметку данных на 4 класса: 0 – группа не имеет отношения, а 3 – группа имеет прямое отношение к интересующей целевой аудитории. Распределение по классам (в долях): 0 – 0,52; 1 – 0,37; 2– 0,073; 3 – 0,037. Пример данных после предварительной обработки приведен на рисунке 1.

	description	activity	name	screen_name	target
0	Присылайте свои анекдоты в "Предложите новость...	Юмор	Азохней! Бесплатные щикарные анекдоты	azohen_vey	1
1	Познавательные мемы, широкий охват тем, уникал...	Юмор	Мемуары ценителей научных мемов	sciencemem	1
2	На Хабр Q&A можно получить ответ на вопрос по ...	Программирование	Хабр Q&A	toster_ru	4
3	Официальный канал сервиса РЕК Инвестиции для т...	Финансы	РЕК Инвестиции	rbc_investments	3
4	Помогаем новичкам стать веб-разработчиками, а ...	Программирование	Хекслет	hexlet	4

Рис. 1. Пример исходных данных

Отметим, что выборка не сбалансированная: мажоритарный класс в 14 раз больше миноритарного класса, поэтому мы выбрали для оценки качества классификации – метрику  $F_1$ , которая представляет собой гармоническое среднее точности и полноты [1-3]:

$$F_1 = \frac{2 \cdot \text{точность} \cdot \text{полнота}}{\text{точность} + \text{полнота}}$$

Размеченный набор данных мы преобразовали в мешок слов, а затем применили частотный анализ текста. Для реализации мешка слов были проделаны следующие действия:

1. Удалили в тексте стоп-слова, которые не несут никакой смысловой нагрузки.
2. Разбили текстовые данные в документах на слова, привели все слова к исходной словоформе (процесс лемматизации и токенизации).
3. Сформировали словарь всех слов в корпусе документа. Провели расчет встречаемости каждого слова.
4. Создали векторное пространство из текстовых данных в виде разреженной матрицы.

Для формирования набора признаков данные были преобразованы в векторное TFIDF пространство. Это пространство может оценить важность слова в рамках конкретного документа: слову присваивается больший вес, если оно чаще встречается в документе, но при этом редко встречается в остальных документах корпуса. Если слово часто появляется в конкретном документе, но при этом редко встречается в остальных документах, оно вероятно, будет описывать содержимое данного документа лучше [1]. Таблица с преобразованным векторным пространством имеет 4365 строк и 23464 столбца.

	5789	5878	6098	6552	6686	7396	7629	7637	7761	7864	...	20614	20798	21046	21439	21804
0	0.070666	0.138949	0.539146	0.11321	0.074291	0.11321	0.132464	0.179032	0.138949	0.057835	...	0.093175	0.063489	0.11321	0.116779	0.072068
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	...	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.207997	...	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.194389

<4365x23464 sparse matrix of type '<class 'numpy.float64''>  
with 115993 stored elements in Compressed Sparse Row format>

Рис. 2. Пример данных в векторном TFIDF пространстве

**Результаты.** В результате работы для каждого алгоритма были рассчитаны метрики точности и полноты и на основе них был проведен расчет метрики  $F_1$  (таблица 1). Для каждой модели были подобраны гиперпараметры для оптимизации метрики  $F_1$ .

Таблица 1

Результаты сравнения качества работы алгоритмов

Алгоритм	Метрика $F_1$
Логистическая регрессия	0,729
Случайный лес	0,709
Наивный Байес	0,706
Ближайшие соседи	0,726
Градиентный бустинг (CatBOOST)	0,771

**Заключение.** В результате проведенного исследования показано, что наиболее успешно с задачей мультиклассовой классификации справились алгоритмы градиентного бустинга, логистическая регрессия и алгоритм ближайших соседей. В связи с тем, что задача классификации – это поиск вероятности отношения к тому или иному классу, а значит результаты можно улучшить путем построения ансамбля моделей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Груздев А. В. Предварительная подготовка данных в Python: Том 1. Инструменты и валидация. – М.: ДМК Пресс, 2023. – 816 с.
2. Бурков А. Машинное обучение без лишних слов. – СПб.: Питер, 2020. – 192 с.
3. Мэрфи К.П. Вероятностное машинное обучение: введение / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2022. – 940 с.
4. Бурков А. Инженерия машинного обучения / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2022. – 306 с.
5. Васильев Ю. Обработка естественного языка. Python и spaCy на практике. — СПб.: Питер, 2021. – 256 с.

УДК 330.4

**ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЙ ХИМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ  
НА ОСНОВЕ ФИНАНСОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ**А.С. Румянцева

Научный руководитель: профессор, д.т.н. А.А. Мицель

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [asr39@tpu.ru](mailto:asr39@tpu.ru)**ASSESSMENT OF THE EFFECTIVENESS OF CHEMICAL INDUSTRY ENTERPRISES BASED  
ON FINANCIAL INDICATORS**A.S. Rumyanceva

Scientific Supervisor: Prof., Dr., A.A. Mitsel

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: [asr39@tpu.ru](mailto:asr39@tpu.ru)

**Abstract.** *The objects of the study are the leading enterprises of the chemical industry in Russia. The purpose of the work is to evaluate the efficiency of enterprises based on financial indicators. Research method: nonparametric DEA (Data Envelope Analysis) method.*

**Введение.** Химическая промышленность является одной из важнейших отраслей в экономике. Эта отрасль играет значительную роль в обеспечении экономической и оборонной безопасности стран, участвует в повышении научно-технического уровня всех отраслей хозяйства, насыщении рынка товарами массового потребления. Использование результативного метода для проведения диагностики финансового состояния предприятия является одной из основных задач, которая стоит перед собственниками и руководителями. Классический метод DEA можно использовать для оценки эффективности экономических объектов, описываемых финансовыми показателями, а не объемами затрачиваемых ресурсов и выпусков.

**Экспериментальная часть.** Метод DEA (Data Envelopment Analysis) — это непараметрический метод оценивания группы действующих единиц, позволяющие выявить наиболее эффективные группы предприятий. DEA — основан на построении границы эффективности, которая является аналогом производственной функции, когда выпуск является не скалярным, а векторным, т.е. когда выпускается несколько видов продукции.

Суть метода DEA в общем виде состоит в следующем: пусть имеются данные для  $m$  входных параметров и  $k$  выходных параметров для каждого из  $n$  однородных объектов (например, фирмы, заводы, производственные комплексы). Для  $j$ -го объекта они представлены вектор-столбцами  $y^{<j>}$  и  $x^{<j>}$  соответственно. Матрицы входных и выходных параметров для всех  $n$  объектов представляют собой матрицу  $X$ , которая имеет размерность  $m \times n$  и матрицу  $Y$ , которая в свою очередь имеет размерность  $k \times n$ .

Модель формулируется в виде задачи линейного программирования в такой форме:



$$\begin{aligned}
 f(v_{out}, L) &= v_{out} \rightarrow \max; \\
 -v_{out} \times Y^j + Y \times L &\geq 0, j = 1 \dots k; \\
 X^i - X \times L &\geq 0, i = 1 \dots m; \\
 v &\geq 1; L \geq 0.
 \end{aligned}$$

где  $f(v_{out}, L)$  - функция эффективности,

$v$  - скалярная величина (эффективность),

$L$  - является вектором весовых множителей размерности  $n \times 1$ .

В качестве меры эффективности финансово-хозяйственной деятельности предприятия можно рекомендовать величину:

$$T_{out} = \exp(-(v_{out} - 1)).$$

В этом случае для предприятий, работающих на границе эффективности ( $v_{out} = 1$ ), эффективность  $T_{out} = 1$ , а для неэффективных предприятий  $v_{out} > 1$ , показатель  $T_{out} < 1$ .

Первый этап работы: выбор предприятий химической отрасли для проведения исследования: АО «Ангарский электролизный химический комбинат» (АО «АЭХК»), АО «Машиностроительный завод» (АО «МСЗ»), ПАО «Новосибирский завод химконцентратов» (ПАО «НЗХК»), АО «Производственное объединение «Электрохимический завод» (АО «ПО ЭХЗ»), АО «Сибирский химический комбинат» (АО «СХК»), ООО «ТОМСКНЕФТЕХИМ», АО «Уральский электрохимический комбинат» (АО «УЭХК»), ПАО «ФОСАГРО».

Для расчетов использовалась информационно-эмпирическая база, а именно данные из 1 и 2 форм обязательной финансовой отчетности за 2017-2021 гг.

Проиллюстрируем модель DEA для 6 входных и 4 выходных параметров. В качестве входных и выходных параметров рассматриваются финансовые показатели, которые описывают финансово-хозяйственную деятельность предприятия [2-4].

Рассчитываем коэффициенты регрессионной зависимости между входными и выходными показателями и выявляем как прямо пропорциональную, так и обратно пропорциональную зависимость между отдельными коэффициентами. Это потребовало модифицировать классическую модель DEA, так как данная модель может быть построена только тогда, когда зависимость прямо пропорциональна.

Для примера приводится расчет за 2017 год (табл.1).

Таблица 1

Коэффициенты регрессии для данных за 2017г.

Входные параметры	Выходные параметры			
	1	2	3	4
1	0,152	-0,136	-2,924	-19,041
2	-0,038	-0,719	-1,382	-10,74
3	2,074	10,439	-34,607	63,053
4	0,174	0,142	-0,734	71,204
5	-2,17	-6,013	29,184	-98,161
6	1,028	0,464	3,066	10,827

Затем проводим расчеты в программе Mathcad и получаем итоговые значения параметра эффективности  $v$  по годам:

$$v_{2017} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,225 \\ 2,977 \\ 2,707 \\ 2,592 \\ 3,613 \\ 2,297 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{2018} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,177 \\ 1,281 \\ 1,176 \\ 1,481 \\ 1,32 \\ 1,42 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{2019} = \begin{pmatrix} 1,167 \\ 1,087 \\ 1,121 \\ 1,075 \\ 1,305 \\ 1,577 \\ 1,016 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{2020} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,327 \\ 1,479 \\ 1,123 \\ 1,351 \\ 1,308 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_{2021} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,439 \\ 1,374 \\ 1,082 \\ 1 \\ 1,631 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Строим графики, как изменяется эффективность действующих предприятий во временной период с 2017 по 2021 гг. соответственно (рис.1):

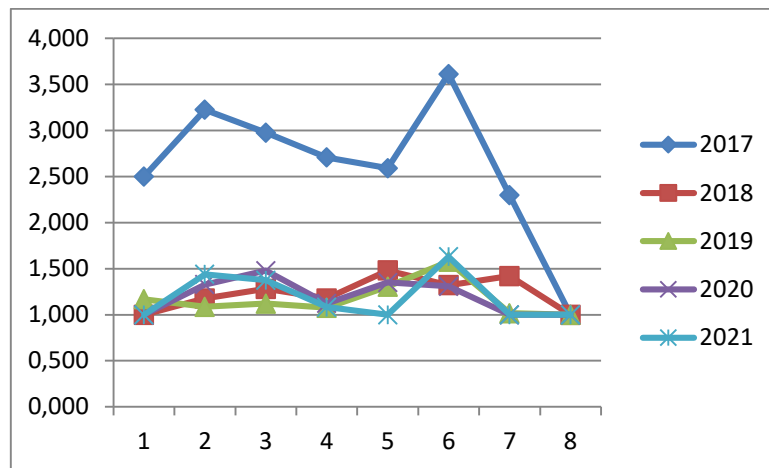


Рис. 1. Сравнительный график

По результатам исследования можно сделать следующие выводы: все предприятия имеют положительную динамику во времени. Можно отметить, что самый неблагоприятный год был 2017 г. для всех предприятий, кроме 8 предприятия (ПАО "ФОСАГРО"), которое является самым эффективным из всех на протяжении 5 лет.

1 (АО «Ангарский электролизный химический комбинат») и 7 (АО «Уральский электрохимический комбинат») предприятия стали наиболее эффективными к 2020-21 годам.

6 предприятие (ООО «ТОМСКНЕФТЕХИМ») к 2021 году стало работать менее результативно.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Государственный информационный ресурс бухгалтерской (финансовой) отчетности: официальный сайт. – Москва. – Обновляется в течение суток. – URL: <https://bo.nalog.ru/> (дата обращения: 22.12.2022)
2. Важдасв А.Н., Мицель А.А. DEA-анализ эффективности отраслей экономики моногорода // Региональная экономика: Теория и практика. – 2017. № 12, – С.2378-2390.
3. Рукавицына Т.А. Развитие модели методологии DEA // Вестник СибГАУ. – 2010. – Т. 24, № 3. – С. 74-77.
4. Новожилов А.А. Использование метода DEA для анализа эффективности перерабатывающей отрасли // Современные наукоемкие технологии. – 2009. – № 2. – С. 43-44.

УДК 519.6

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА САМООЧИЩЕНИЯ СТОЧНЫХ ВОД  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КАПЕЛЬНОГО БИОФИЛЬТРА**

А.В. Амзаракова

Научный руководитель: старший преподаватель М.Д. Михайлов  
Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: nastya.amzarakova.00@mail.ru

**COMPUTATIONAL MODELING OF THE PROCESS OF WASTEWATER SELF-PURIFICATION  
WITH USING DROP BIOFILTER**

A.V. Amzarakova

Scientific Supervisor: senior lecturer M.D. Mikhailov  
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: nastya.amzarakova.00@mail.ru

**Abstract.** *In the present study, we investigate the effect of a drop biofilter on the process of wastewater self-purification. Modifications of the Streeter-Phelps, Monod, Dobbins-Driesneck and Kemp models and its special cases are used as a model.*

**Введение.** Многие водоемы утратили способность к самоочищению в связи с увеличением объема загрязнений, сбрасываемых в реки, озера и другие водные ресурсы. Поэтому в настоящее время весьма актуальна проблема очистки сточных вод.

В работе рассматривается модификация моделей Стритера-Фелпса, Моно, Доббинса-Дриснека и Кемпа [1]:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -k_1L - k_3L - kL - \frac{\mu_{\max}XL}{Y(K_L + L)} + J_B, \\ \frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{\max}XL}{K_L + L}, \\ \frac{dD}{dt} = k_1L - k_2D - \frac{\mu_{\max}XL}{Y(K_L + L)} + J_1 + J_2 - J_3, \end{cases} \quad (1)$$

с соответствующими начальными условиями:

$$L(0) = L^0, X(0) = X^0, D(0) = D^0, \quad (2)$$

и её частные случаи; где  $t$  – время,  $L(t)$  – концентрация органического вещества,  $X(t)$  – биомасса микроорганизмов,  $D(t)$  – дефицит кислорода,  $D = q - q_0$ ,  $q$  – реальная концентрация кислорода в воде,  $q_0$  – равновесная, при отсутствии загрязнения. Параметры  $k_1$ ,  $k$  и  $k_2$  были представлены в [2].  $k_3$  – константа скорости удаления органического вещества путем осаждения на дно,  $\mu_{\max}$  – максимальная удельная скорость роста микроорганизмов,  $Y$  – коэффициент трансформации субстрата в биомассу,  $K_L$  – константа полунасыщения,  $J_B$  – поток органических веществ, вымываемых из донных отложений,  $J_1$  – скорость убыли кислорода за счет разложения придонных иловых отложений,  $J_2$  – скорость убыли растворенного кислорода вследствие дыхания растений,  $J_3$  – скорость поступления кислорода из-за фотосинтеза.

Для решения задачи (1), (2) используется неявный разностный метод:

$$\begin{cases} \frac{L_{j+1} - L_j}{\tau} = -(k_1 + k_3 + k)L_{j+1} - \frac{\mu_{\max}}{Y(K_L + L_j)} X_j L_{j+1} + J_B, \\ \frac{X_{j+1} - X_j}{\tau} = \frac{\mu_{\max}}{K_L + L_{j+1}} L_{j+1} X_{j+1}, \\ \frac{D_{j+1} - D_j}{\tau} = k_1 L_{j+1} - k_2 D_{j+1} - \frac{\mu_{\max}}{K_L + L_{j+1}} X_{j+1} L_{j+1} + J_1 + J_2 - J_3, \\ L_0 = L^0, X_0 = X^0, D_0 = D^0. \end{cases} \quad (3)$$

**Модификация моделей Стритера-Фелпса и Моно.** Рассматривается частный случай модели (1), который является модификацией моделей Моно и Стритера-Фелпса:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -k_1 L - kL - \frac{\mu_{\max} XL}{Y(K_L + L)}, \\ \frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{\max} XL}{K_L + L}, \\ \frac{dD}{dt} = k_1 L - k_2 D - \frac{\mu_{\max} XL}{K_L + L}, \\ L(0) = L^0, X(0) = X^0, D(0) = D^0. \end{cases} \quad (4)$$

Численное решение задачи Коши (4) определяется с помощью неявного метода, аналогичного (3).

**Модификация моделей Стритера-Фелпса, Доббинса-Дриснека и Кемпа.** Второй частный случай модели (1) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -(k_1 + k_3 + k)L + J_B, \\ \frac{dD}{dt} = k_1 L - k_2 D + J_1 + J_2 - J_3, \\ L(0) = L^0, D(0) = D^0. \end{cases} \quad (5)$$

Получено точное решение задачи (5):

$$\begin{cases} L(t) = \frac{J_B}{k_1 + k_3 + k} + \left( L^0 - \frac{J_B}{k_1 + k_3 + k} \right) e^{-(k_1 + k_3 + k)t}, \\ D(t) = \frac{k_1 J_B}{(k_1 + k_3 + k)k_2} + \frac{J_1 + J_2 - J_3}{k_2} + \frac{1}{k_1 + k_3 + k - k_2} \left( -k_1 L^0 + \frac{k_1 J_B}{k_1 + k_3 + k} \right) e^{-(k_1 + k_3 + k)t} + \\ + \left( D^0 - \frac{k_1 J_B}{(k_1 + k_3 + k)k_2} - \frac{J_1 + J_2 - J_3}{k_2} - \frac{1}{k_1 + k_3 + k - k_2} \left( -k_1 L^0 + \frac{k_1 J_B}{k_1 + k_3 + k} \right) \right) e^{-k_2 t}. \end{cases} \quad (6)$$

Для решения задачи Коши (5) используется неявный разностный метод, аналогичный методу (3).

Для задачи (5) исследуется влияние потока органических соединений из донных отложений  $J_B$  на поведение концентрации органических соединений  $L(t)$  и дефицита кислорода  $D(t)$  без использования биофильтра ( $k = 0$ ) и дается сравнение с результатами, приведенными в [1].

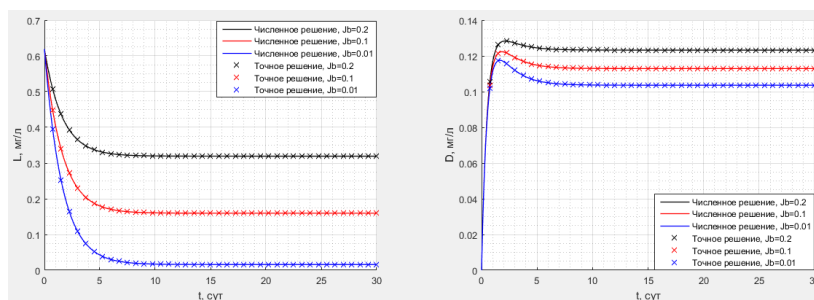


Рис. 1. Влияние потока органических соединений из донных отложений на  $L(t)$  и  $D(t)$ ,

$$J_B = 0,2 \quad J_B = 0,1 \quad \text{и} \quad J_B = 0,01$$

**Результаты.** Проведено сравнение разностных решений модификации моделей Стритера-Фелпса, Моно, Доббинса-Дриснека и Кемпа и его частных случаев для концентрации нефтепродуктов  $L(t)$ , биомассы микроорганизмов  $X(t)$  и дефицита кислорода  $D(t)$ . Рассмотрены случаи: без использования (скорость изъятия органических загрязнений  $k = 0,0 \frac{1}{сут}$ ) и с использованием биофильтра ( $k = 4,4 \frac{1}{сут}$ ). Результаты численных расчетов представлены на рис. 2-3.

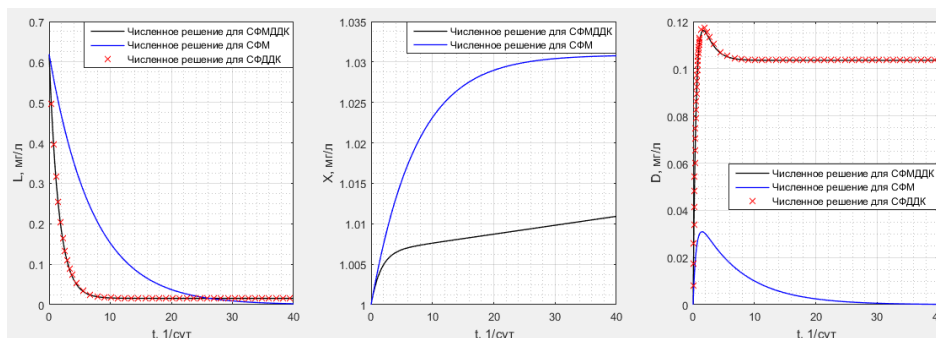


Рис. 2. Сравнение приближенных решений  $L(t)$ ,  $X(t)$  и  $D(t)$  без использования биофильтра ( $k = 0$ )

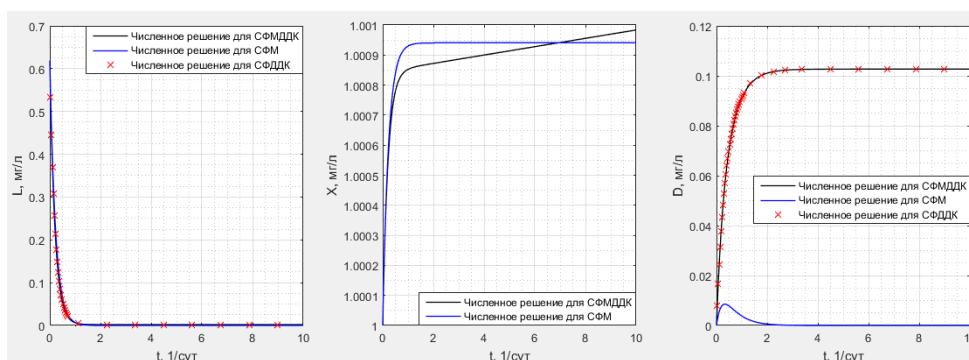


Рис. 3. Сравнение приближенных решений  $L(t)$ ,  $X(t)$  и  $D(t)$  с использованием биофильтра ( $k=4,4$ )

**Заключение.** Максимальная относительная погрешность концентрации органического вещества  $L(t)$  и дефицита кислорода  $D(t)$  с использованием и без использования биофильтра составляют около 0,025 процентов. В результате проведенных исследований показано, что использование биофильтра существенно ускоряет процесс самоочистки в водоемах, но, при этом, процесс происходит быстрее, так как в модели учитывается влияние бактерий (модель Моно) и происходит осаждение загрязнения на дно водоема ( $k_3L$ ). За счет  $J_B$  (рис. 1) в водоем поступает поток органических веществ, вымываемых из донных отложений, в силу чего процесс самоочистки не падает до предельно-допустимых значений, а опускается до величин примерно 0,016 мг/л при  $J_B=0,01$  мг/л.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алехин В.Е. Анализ и совершенствование математических моделей для прогноза экологической надежности источников коммунального водоснабжения: Дис. канд. техн. наук: – Москва, 2006. – 217 с.
2. Амзаракова А.В., Михайлов М.Д. Численное моделирование процесса самоочистки сточных вод с применением различных типов биофильтров // Все грани математики и механики: сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции (Томск, 23-27 мая 2022 г.) / под ред. Л. В. Гензе. – Томск: ООО «Издательство «Красное знамя», 2022. – С. 6-11.

УДК 519.6

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ  
ВНУТРИ ОБЪЕКТА НА ЭЛЕКТРОДНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТОКОВЫХ  
КОНФИГУРАЦИЯХ**А.А. Афанасьева

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.В. Старченко  
Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050  
E-mail: afanasyeva.a.a@bk.ru

**INVESTIGATION OF THE EFFECT OF THE DISTRIBUTION OF ELECTRICAL  
CONDUCTIVITY INSIDE AN OBJECT ON ELECTRODE VOLTAGES AT VARIOUS CURRENT  
CONFIGURATIONS**A.A Afanasyeva

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.V. Starchenko  
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050  
E-mail: afanasyeva.a.a@bk.ru

**Abstract.** *Electrical Impedance Tomography (EIT) is a non-invasive, radiation-free imaging technique which reconstructs the conductivity distribution inside an observation region. In practice, currents of prescribed magnitudes are injected at electrodes placed on the boundary of the region. The current passes through the object and the resulting voltages are recorded. These measurements are the data needed to estimate the conductivity within the object. In EIT systems, the quality and the accuracy of the measurements depend on many factors such as the configuration of the electrodes and the injected current distribution. The size, geometry, and location of the electrodes must be considered because they can affect the data needed for the reconstruction. The voltage loss due to the effective contact impedance, which is the thin resistive layer between the electrode and object, should also be taken into account to accurately measure the boundary voltages.*

**Введение.** Электроимпедансная томография (ЭИТ) – это метод визуализации, который восстанавливает распределение электрической проводимости внутри объекта с помощью электрических измерений на электродах, прикрепленных на поверхности объекта. Задача реконструкции в ЭИТ является некорректной из-за того, что граничные измерения мало чувствительны к изменениям распределения внутренней электрической проводимости. Поэтому эта задача является обратной задачей, для решения которой предлагаются как прямые, так и итерационные методы. В работе используется полная электродная модель (СЕМ, Complete Electrode Model) – это практическая модель в ЭИТ, которая наиболее реально моделирует электроды. Эта модель может имитировать измерения ЭИТ с гораздо большей точностью, чем континуальные модели. Нас интересует чувствительность электрического потенциала на электродах по отношению к проводимости. Это позволит оценить влияние неопределенности как проводимости, так и контактного импеданса на решение прямой задачи ЭИТ. Это также позволит понять влияние возможных

нарушений проводимости или небольших изменений импеданса из-за контакта кожи с электродом на измерения напряжения на электродах.

Целью данной работы является исследование влияния электрической проводимости на электродные напряжения при различных токовых конфигурациях электродов.

**Экспериментальная часть.** Математическая постановка для решения прямой задачи ЭИТ в области  $\bar{D} = D \cup \Gamma$  получается из уравнений Максвелла в проводниках, закона Ома для стационарных проводников и необходимых для получения единственного решения граничных условий [1].

Уравнение для электрического потенциала  $u$  в двумерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, (x, y) \in D.$$

На границе, контактирующей с воздухом, задается производная равная нулю (отсутствие тока):

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, (x, y) \in \Gamma / \bigcup_{l=1}^L E_l$$

На электродах  $E_l \in \Gamma$  рассматриваются граничные условия, учитывающие сопротивление электродов, так называемая полная электродная модель [1,2]:

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, \int_{E_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = I_l, l = 1, \dots, L.$$

где  $u$  – электрический потенциал (напряжение),  $\sigma$  – электропроводимость,  $z_l$  – сопротивление электрода (импеданс),  $E_l$  – поверхность электрода,  $I_l$  – известная сила тока на электроде,  $L$  – количество электродов.

Для существования и единственности решения этой задачи требуется выполнение условий [2]:

$$\sum_{l=1}^L I_l = 0; \sum_{l=1}^L U_l = 0.$$

Численный метод решения прямой двумерной задачи ЭИТ приведен в [3]. В качестве тестовой задачи ЭИТ рассмотрим прямую задачу ЭИТ в круге единичного радиуса с кусочно-постоянными значениями электрической проводимости. Вставки с различной электрической проводимостью круглые, центр первой вставки –  $(-0,5; 0,1)$ , а второй –  $(0,2; 0,4)$ , также они имеют разные радиусы  $\rho_1 = 0,3$  и  $\rho_2 = 0,2$ , соответственно (см. рис. 1). Середины электродов шириной  $2w$  расположены при  $\varphi = \{\pi/4; \pi/2; 3\pi/4; \pi; 5\pi/4; 3\pi/2; 7\pi/4; 2\pi\}$ , полуширина электрода  $w = 0,25$ . Рассматривались следующие значения проводимости для вставок: 1) проводимость одинаковая  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ ; 2) проводимость одинаковая у вставок  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,66$ ,  $\sigma_3 = 1$ ; 3) проводимость одинаковая у вставок  $\sigma_1 = \sigma_2 = 5$ ,  $\sigma_3 = 1$ ; 4) проводимость у вставок разная  $\sigma_1 = 0,01$ ,  $\sigma_2 = 5$ ,  $\sigma_3 = 1$ ; 5) проводимость у вставок разная  $\sigma_1 = 5$ ,  $\sigma_2 = 0,01$ ,  $\sigma_3 = 1$ . Ток подается на двух электродах  $\pm 1$ , в зависимости от описанной ниже конфигурации. Один электрод используется для подачи тока, а другой – для приема тока. Напряжение фиксировалось на всех электродах. Для исследования влияния электрической проводимости включений на напряжение использовались различные конфигурации подачи тока через два электрода.

**Результаты.** По результатам численных расчетов получены следующие выводы:

1) Наиболее чувствительны к изменениям электрической проводимости – активные электроды (токоподающий и тока принимающий), а наименее чувствительны удаленные.

2) При кратном увеличении или уменьшении  $\sigma$  включений амплитуда возмущений напряжения  $\{U_i\}$  на электродах сохраняется.

3) Если вставка находится в стороне от пути тока между активными электродами, то она не оказывает заметное влияние на измерения напряжения.

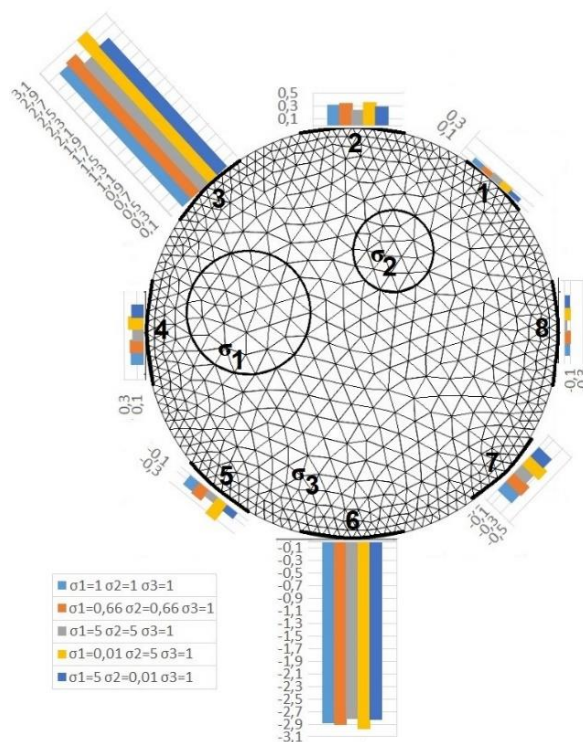


Рис. 1. Расчётная сетка с 762 ячейками для круга с двумя вставками и 8 электродами. Ток подается на электрод 3, а принимается на электроде 6. Различными цветами показаны значения напряжения на электродах при различном распределении электрической проводимости

**Заключение.** В данной работе представлено исследование влияния распределения электрической проводимости на напряжение на электродах при различных токовых конфигурациях в прямой задаче ЭИТ с круглыми вставками различного радиуса на модели с 8 электродами.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borcea L. Electric Impedance Tomography. Topical Review // Inverse Problems. – 2002. – Vol. 18. – P. 99-136.
2. Somersalo E., Cheney M., Isaacson D. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography // SIAM J. Appl. Math. 1992. – Vol. 52. – P. 1023-1040.
3. Афанасьева А.А., Старченко А.В. Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – № 78. – С. 5–21.



УДК 537.85

**ВОЗМОЖНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТРЕКА ДЛЯ АЭРОБАЛЛИСТИЧЕСКИХ  
ИСПЫТАНИЙ КРУПНОГАБАРИТНЫХ МОДЕЛЕЙ**

А.Р. Иксанов

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. С.В. Синяев

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: cassieage0150@gmail.com

**POSSIBILITIES OF ELECTROMAGNETIC TRACK  
FOR AEROBALLISTIC TESTING OF LARGE MODELS**

A.R. Iksanov

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD. S.V. Sinyayev

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: cassieage0150@gmail.com

***Abstract.** The present article deals with the estimated calculations of the original scheme of a high-speed electromagnetic track for aeroballistic testing of large-sized models. Based on the result of the research, the efficiency of electromechanical energy conversion is estimated, the parameters of the main elements of the device are determined, including the length of the boost section of the track.*

**Введение.** Аэробаллистические испытания крупногабаритных тел проводятся на ракетных треках длиной от 3 до 10 км с использованием разгоняющих ракетных двигателей, установленных на скользящей по рельсам платформе с исследуемой моделью [1]. К настоящему времени созданы предпосылки для разработки и создания электромагнитных треков нового поколения [2–4]. Их потенциальными преимуществами являются укороченная более чем в десять раз трасса разгона и активная платформа для модели, служащая одновременно разгонным якорем рельсового ускорителя. В настоящей работе представлены результаты оценочных расчетов оригинальной схемы высокоскоростного электромагнитного трека для разгона моделей массой несколько сотен килограммов до скорости порядка 2 км/с.

**Общая схема и особенности работы трека.** Общая схема моделируемого трека приведена на рис. 1. Трек состоит из трех основных функциональных узлов: генератора электрической энергии, накопителя-преобразователя энергии и многорельсового электродинамического ускорителя (МРЭУ) с металлическим якорем, разгоняющим модель. Генератором электрической энергии служит мощный импульсный магнетогидродинамический (ИМГД) генератор на твердом плазмообразующем топливе [2]. Накопление энергии осуществляется в трансформаторе с повышающей ток вторичной обмоткой [3], к которой подключается ускоритель [4]. Подключение ускорителя происходит с помощью якоря, который входит в ускоритель с начальной скоростью около 50 м/с, и параллельно срабатывающего размыкающего ключа на вторичной обмотке трансформатора. Якорь состоит из  $n$  скоб в форме «ласточкиного хвоста». Скобы размещены в жестком неэлектропроводном поддоне с гнездом для модели.

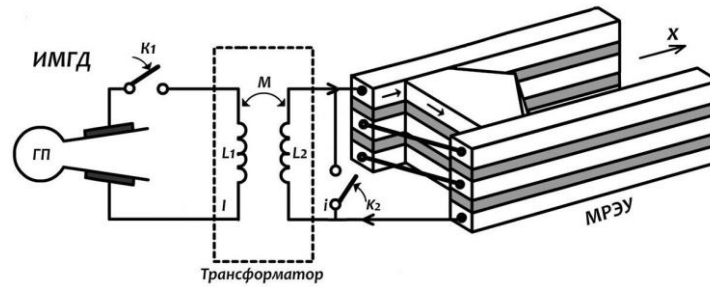


Рис. 1. Общая схема электромагнитного трека: ГП – генератор плазмы;  $K_1, K_2$  – быстродействующие замыкающие ключи;  $L_1, L_2, M$  – индуктивности обмоток трансформатора и их взаимная индуктивность;  $I, i$  – токи в обмотках трансформатора

С момента выхода ИМГД-генератора на режим холостого хода процесс ускорения модели включает в себя три последовательных этапа. На первом этапе происходит накопление магнитной энергии трансформатором. На втором переходном этапе сцепка «якорь-модель» начинает ускоряться с момента входа якоря в ускоритель и до момента  $t_2$  полного переключения тока вторичной обмотки на ускоритель. На третьем, основном этапе разгона, ускорение сцепки «якорь-модель» происходит под действием тока вторичной обмотки трансформатора при работающем ИМГД-генераторе.

**Постановка задачи.** Работа ИМГД-генератора на нагрузку в [3] описывается линейной зависимостью  $U(I) = U_0 - rI$ , где  $U_0$  – напряжение холостого хода генератора,  $I$  – ток,  $r$  – параметр внутреннего сопротивления МГД-канала. Индуктивности обмоток трансформатора  $L_1$  и  $L_2$ , а также их взаимная индуктивность  $M$  рассчитываются по следующим формулам:

$$L_1 = \frac{2W_0}{(1-k_c^2)I_m^2}, \quad L_2 = \frac{2k_c^2W_0}{(1-k_c^2)i_m^2}, \quad M = \frac{2k_c^2W_0}{(1-k_c^2)I_m|i_m|}, \quad k_c = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}},$$

где  $I_m$  – предельно допустимое значение тока в ИМГД-генераторе,  $i_m$  – максимальное значение тока на вторичной обмотке,  $W_0$  – магнитная энергия трансформатора при токах  $I_m$  и  $i_m$ ,  $k_c$  – коэффициент связи его обмоток. Работа размыкающего ключа на втором этапе работы моделировалась с помощью зависимости, описывающей нарастание сопротивления ключа вплоть до полного разрыва электрической цепи в момент  $t_2$ . Индуктивность ускорителя рассчитывалась по формуле  $L_r(t) = \chi \cdot x(t)$ , где  $\chi$  – погонная индуктивность ускорителя, а  $x(t)$  – продольная координата якоря в процессе разгона. Сопротивление ускорителя рассчитывалось с помощью уравнения:

$$\frac{dR_r}{dt} = \frac{2n\eta_0 u(t)}{S} + \alpha i_r^2(t) R_r(t), \quad \alpha = \frac{\eta_0 \beta}{c \rho S^2},$$

где  $n$  – число пар рельсов в ускорителе,  $S$  – площадь поперечного сечения рельса,  $\eta_0$  – начальное значение удельного сопротивления рельсов,  $u(t)$  – скорость якоря,  $\beta$  – температурный коэффициент,  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность материала рельсов. Работа трека описывалась уравнениями электрических цепей устройства и уравнением движения сцепки под действием электромагнитной силы.

**Результаты.** Оценочные расчеты проведены для электродинамического трека с параметрами: ИМГД-генератор мощностью 600 МВт –  $U_0 = 4,74 \cdot 10^3$  В,  $r = 0,00822$  Ом; трансформатор –  $L_1 = 0,291$  Гн,  $L_2 = 2,409 \cdot 10^{-3}$  Гн,  $M = 0,024$  Гн,  $k_c = 0,91$ ; ускоритель –  $n = 5$ ,  $\chi = 14,44 \cdot 10^{-6}$  Гн/м,  $S = 0,035$  м<sup>2</sup>; материал рельсов – хромистая медь; масса сцепки «якорь-модель» –  $m = 300$  кг.

На рис. 2 приведены: *a)* результаты расчета скорости модели  $u(t)$  от ее положения в ускорителе  $x(t)$  и *b)* зависимость тока в ускорителе от времени  $i_r(t)$ . На длине разгона около 72 м якорь разгоняет модель до скорости выше 2 км/с. Резкое нарастание тока на начальной стадии разряда вызвано переключением электрических цепей вторичной обмотки трансформатора на втором этапе работы трека. Пиковая величина ускорения сцепки – 9600 g соответствует максимальному значению тока в ускорителе порядка 2 МА. Оценочная максимальная плотность тока на скользящих контактах якоря не превышает 10 кА/см<sup>2</sup>.

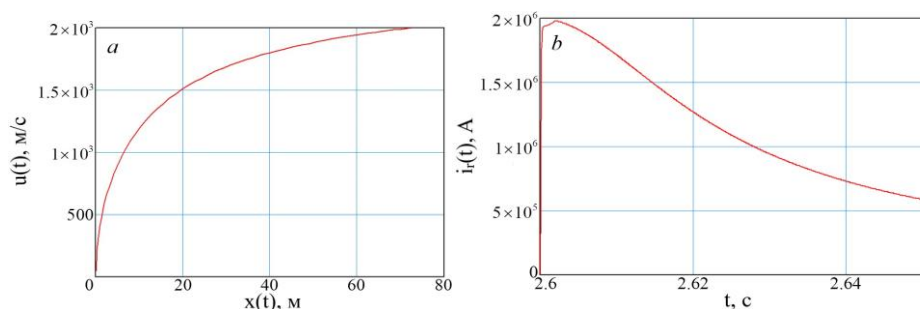


Рис. 2. Динамика процесса: *a)* – зависимость скорости модели от ее положения в ускорителе, *b)* – зависимость тока в ускорителе от времени

Работа трека включает в себя цепочку последовательных преобразований одного вида энергии в другой: от энергии топлива ИМГД-генератора – до кинетической энергии сцепки «якорь-модель». Общий коэффициент преобразований энергий во всей цепочке примерно 10,5 %. Коэффициент преобразования энергии топлива в электрическую энергию ИМГД-генератора [3] около 18 %, а расчетный коэффициент преобразования электрической энергии генератора в кинетическую энергию сцепки примерно 58 %.

**Заключение.** Представлены расчеты для электромагнитного трека, проведена оценка эффективности электромеханического преобразования энергии, определены параметры основных элементов устройства. В расчетном варианте трека сцепка массой 300 кг разгоняется до скорости свыше 2000 м/с в ускорителе длиной порядка 72 м. Анализ результатов расчета указывает на работоспособность предложенной схемы устройства и основных его узлов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баландин В.В., Бухтояров В.Н., Викторов В.А. [и др.] Постановка баллистических испытаний на ракетном треке ВНИИЭФ // Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения : сб. докладов научной конференции Волжского регионального центра РАН – Саров, 2000. – С. 189-194.
2. Велихов Е.П., Афонин А.Г., Бутов В.Г. [и др.] Импульсный МГД-генератор нового поколения // Доклады академии наук. – 2019. – Т. 486, № 2. – С. 178-183.
3. Butov, V.G., Afonin, A.G., Sinyaev, S.V. et al. Compact electric energy storage system based on a powerful pulsed MHD generator // PPC 2017 Paper Index | IEEE Pulsed Power Conference, June 18–22, Brighton, UK. – P. 404-408.
4. Poltanov, A.E., Kondratenko, A.K., Glinov, A.P., Ryndin, V.N. Multi-turn railguns: concept analysis and experimental results // IEEE Transactions on Magnetics. – 2001. – V. 37, No. 1. – P. 457-461.

УДК 531

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА БАЗОВОГО МАТЕРИАЛА  
В ВЫСОКОПОРИСТОМ МЕТАМАТЕРИАЛЕ**Л.Р. Ахметшин

Научный руководитель: д.ф.-м.н. И.Ю. Смолин

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,

Россия, г. Томск, Академический пр., 2/4, 634055

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: [Akhmetshin.lr@gmail.com](mailto:Akhmetshin.lr@gmail.com)**ANALYTICAL DETERMINATION OF THE BASE MATERIAL VOLUME  
IN THE HIGHLY POROUS METAMATERIAL**L.R. Akhmetshin

Scientific Supervisor: Dr. I.Yu. Smolin

Institute of Strength Physics and Materials Science, Russia, Tomsk, 2/4 Akademicheskii ave., 634055

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [Akhmetshin.lr@gmail.com](mailto:Akhmetshin.lr@gmail.com)

***Abstract.** This work discusses a tetrachiral mechanical metamaterial. An important issue in the design of 3D printed metamaterial samples is to evaluate the consumption of the base material. Special attention is paid to the volume of the base material consumed in the creation of cellular structures. Equations are derived for calculating the base material volume of metamaterial samples. The considered metamaterial is composed of unit cells connected in two different ways (adjoining and overlapping) and aligned along one, two or three coordinate axes to obtain 1D, 2D and 3D samples.*

**Введение.** Метаматериалы – это искусственно созданные материалы, обладающие необычными свойствами, чаще всего, не встречающимися в природе. При создании метаматериалов наибольшее внимание уделяется созданию структур на микроуровне и выше, а не химическому составу базового составляющего материала. По виду необычных свойств метаматериалы подразделяют на механические, оптические, акустические и многие другие метаматериалы. Механические метаматериалы характеризуются необычными механическими свойствами. Среди различных механических метаматериалов особыми свойствами обладают хиральные механические метаматериалы [1]. Термин хиральность используется для описания объекта, который не может накладываться на свое зеркальное изображение [2]. Метаматериалы уже хорошо проявили себя в промышленных применениях, например, создание механических регулируемых стентов или скаффолдов [3] и конструкций с изменяемой формой [4].

Используя последние достижения производственных технологий, особенно аддитивного производства, теперь можно изготавливать метаматериалы со сложными микроструктурами, открывая новые возможности для проектирования многофункциональных структур [5]. При производстве таких изделий требуется знать каковы будут затраты базового материала при 3D печати.

Цель данной работы состоит в получении формул для расчета объема базового материала в образцах из тетрахиального метаматериала, имеющих разные геометрические размеры и особенности соединения элементарных ячеек.

**Структура метаматериала.** В работе рассматривается тетрахиальный метаматериал, представленный на рис. 1а, который имеет квадратную площадь поперечного сечения с линейными размерами  $L$  – длина,  $H$  – ширина,  $T$  – толщина. Образец состоит из большого числа элементарных ячеек (рис. 1б). Грань элементарной ячейки имеет хиральную структуру и состоит из кольца и прилегающих к нему по касательной связок (рис. 1в). Пять параметров определяют геометрию тетрахиальной структуры:  $l$  – длина ячейки,  $t$  – ширина связки,  $h$  – толщина связки,  $r_2$  – внешний радиус кольцевого элемента,  $r_1$  – внутренний радиус кольцевого элемента. Угол  $\theta$  – угол наклона связки, зависит от прочих параметров структуры. Толщина связки элементарной ячейки появляется в процессе экструдирования вдоль оси  $Z$ . Угол  $\theta$  строится от воображаемой линии, проведенной из вершины связки к кольцу по касательной.

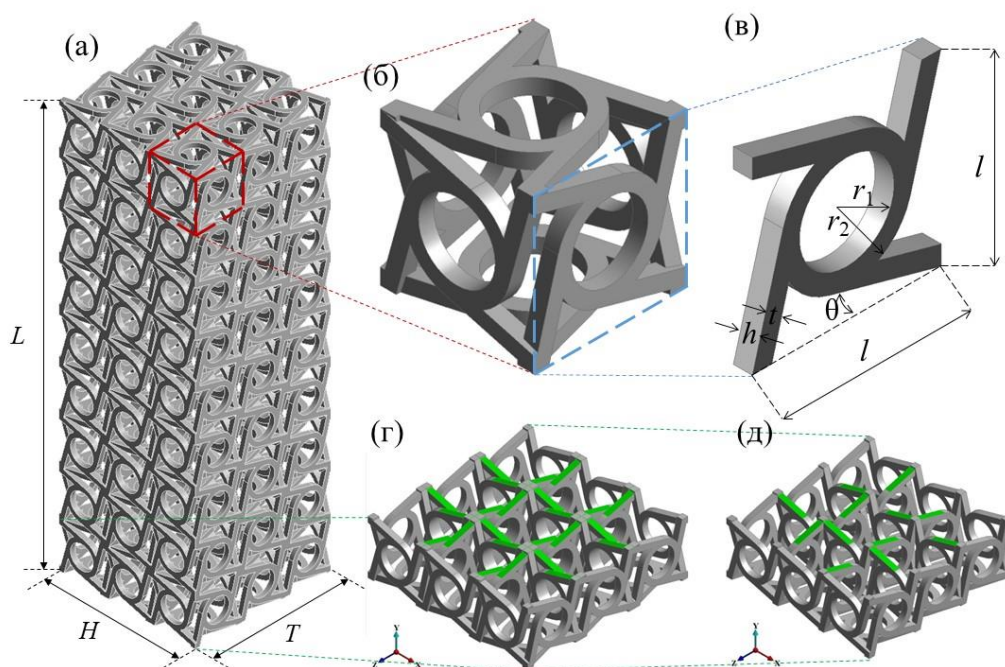


Рис. 1. Построение метаматериала из элементарных ячеек с тетрахиальной структурой: трехмерный образец (а), элементарная ячейка (б), хиральная структура – грань элементарной ячейки (в), слои образца, полученные соединением ячеек методом «присоединение» (г) и «внахлест» (д)

Ячейки метаматериала в образце можно соединять двумя способами – «присоединение» и «внахлест» [6]. «Присоединение» – это метод соединения, когда одна ячейка соединяется с другой и увеличивает толщину внутренних стенок в области соединения (рис. 1г). Метод «внахлест» подразумевает, что каждая последующая ячейка будет иметь общую грань с предыдущей (рис. 1д).

**Результаты.** Из описания структуры метаматериала ясно, что метод соединения ячеек «присоединение» расходует больше базового материала на создание образца. Рассмотрим одномерный, двумерный и трехмерный случаи для каждого из методов соединения:

$$V_{ADx} = n_x \cdot 6 \cdot V_{wall} - \text{имеем всегда шесть граней};$$

$$V_{OVx} = V_{wall} \cdot [5 \cdot n_x + 1] - \text{каждая последующая ячейка имеет на 1 грань меньше, кроме первой};$$

$$V_{ADxz} = n_x \cdot n_z \cdot 6 \cdot V_{ed};$$

$$V_{OVxz} = V_{OVx} \cdot n_z - n_x \cdot (n_z - 1) \cdot V_{ed};$$

$$V_{ADxzy} = n_x \cdot n_z \cdot n_y \cdot 6 \cdot V_{ed};$$

$$V_{OVxzy} = V_{OVxz} \cdot n_y - n_x \cdot n_z \cdot (n_y - 1) \cdot V_{ed}.$$

где  $V_{AD(OV)x}$  – объем образца в одномерном случае; индексы AD и OV означают способы соединения «присоединение» (adjoining) и «внахлест» (overlapping), соответственно;  $n_x$  – количество ячеек вдоль оси X;  $V_{wall}$  – объем одной тетрахиральной структуры;  $V_{AD(OV)xz}$  – объем образца в двумерном случае;  $n_z$  – количество ячеек вдоль оси Z;  $V_{AD(OV)xzy}$  – объем образца в двумерном случае;  $n_y$  – количество ячеек вдоль оси Y.

**Заключение.** В работе предложены формулы для расчета объема базового материала в образцах из метаматериала, имеющих разную пространственную размерность и полученных разными способами соединения элементарных ячеек. Выявлены особенности изменения объема базового материала при разных способах соединения ячеек. Полученные результаты можно использовать при создании образцов для натуральных испытаний.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2022-0003.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu W., Hu W., Qian G., Liao H., Xu X., Berto F. Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review // *Materials & Design*. – 2019. – Vol. 180. – No. 107950.
2. Thomson B.K., Kelvin B. Thomson W. Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light. Cambridge University Press. – 1904.
3. Noordin M.A., Zulkipli M.A.S., Hussein N.A.K., Saad A.P.M. Evaluation of Functionally Graded Architecture using Fused Filament Fabrication Technique for Bone Scaffold Applications // *International Journal of Integrated Engineering*. – 2022. – Vol. 14. – No. 2. – P. 1-6.
4. Wang L.-C., Song W.-L., Fang D. Twistable Origami and Kirigami: from Structure-Guided Smartness to Mechanical Energy Storage // *ACS Applied Materials & Interfaces*. – 2019. – Vol. 11. – P. 3450-3458.
5. Coulais C., Sabbadini A., Vink F., van Hecke M. Multi-step self-guided pathways for shape-changing metamaterials // *Nature*. – 2018. – Vol. 561. – P. 512-515.
6. Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu. Characterization of a chiral metamaterial depending on the type of connection between unit cells // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. – 2022. – Vol. 236. – No. 19. – P. 10214-10220.

УДК 531.552

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА

А.В. Литвинова

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. В.В. Фарапонов

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [alenlity\\_nova@mail.ru](mailto:alenlity_nova@mail.ru)

## MATHEMATICAL MODELING OF THE MOVEMENT OF AN ARTILLERY PROJECTILE

A.V. Litvinova

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD. V.V. Faraponov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [alenlity\\_nova@mail.ru](mailto:alenlity_nova@mail.ru)

***Abstract** A program has been developed to calculate the multidimensional parameter of projectile trajectories. The specific of the program lies in the fact that the change in aerodynamic coefficients is considered not according to the standard laws used in ballistics, but according to dependencies taken from the computer program for preliminary analysis of the aerodynamic characteristics of Missile Datcom. As part of this approach, it is possible to consider the individual configuration features of the projectiles.*

**Введение.** Численное моделирование движения твердого тела с учетом его взаимодействия с воздухом имеет важное значение в своем практическом применении. Существует большое количество математических моделей, которые однозначно определяют траекторию различных снарядов. В работе представлены результаты численного решения обоснованно отобранной и реализуемой модели движения осесимметричных снарядов.

**Экспериментальная часть.** В рамках реализованного подхода взята в основу математическая модель движения осесимметричных снарядов Р.Е. Соркина [1]. Она состоит из 12 нелинейных дифференциальных уравнений: 3 уравнения движения центра масс, 3 уравнения вращательного движения вокруг центра масс и 6 кинематических соотношений. В составе соотношений системы встречаются 6 аэродинамических коэффициентов, которые зависят от числа Маха и угла атаки. Преимущество модели Р.Е. Соркина заключается в том, что в системе уравнений рассматриваются комплексный угол атаки и комплексная угловая скорость для перехода к системам координат, не связанным жестко с телом. После интегрирования соотношений математической модели получим: скорость центра масс снаряда; координаты центра масс снаряда; составляющие угловой скорости; проекцию угловой скорости на ось симметрии тела связанной системы координат; угол поворота снаряда вокруг своей оси; углы, определяющие положение вектора скорости в земной системе координат; пространственный угол атаки.

На кафедре динамики полета физико-технического факультета ТГУ ранее была реализована программа расчета параметров траектории на языке программирования Delphi, в которой используется математическая модель Р.Е.Соркина [2]. В этой программе учитываются изменения только 2-х

аэродинамических коэффициентов от числа Маха, остальные коэффициенты считаются константами. Коэффициент лобового сопротивления рассчитывается по общепринятому в баллистике стандартному закону сопротивления 1943 года [3, 4]. Коэффициент опрокидывающего момента учитывается по общепринятой кусочно-непрерывной функции [5]. Основной недостаток этой программы заключается в том, что во время расчета остальные 4-х аэродинамических коэффициента остаются константами. Кроме того, конфигурационные особенности метаемых тел в общепринятых законах изменения аэродинамических коэффициентов не учитываются. Для учета индивидуальной геометрии метаемых тел существуют программы предварительного анализа аэродинамических характеристик. Эти программы, по заданной конфигурации снаряда в продольном сечении на входе, на выходе определяют полуэмпирические значения функций требуемых аэродинамических коэффициентов для широкого диапазона чисел Маха и для различных углов атаки.

Ввод данных для расчёта

Массово-геометрические характеристики (Значения вводятся через запятую)

Аэродинамические характеристики (Значения вводятся через запятую)

Начальные условия (Значения вводятся через запятую)

Калибр [м]: 0.152

Масса снаряда [кг]: 40

Длина снаряда [м]: 0.6688

Длина головной части [м]: 0.3952

Длина заповской части [м]: 0.07144

Радиус оживала [м]: 0.836

Угол наклона заповской части [°]: 9

Осевой момент инерции [кг·м²]: 0.133416

Экваториальный момент инерции [кг·м²]: 1.12815

Расстояние от точки приложения силы Магнуса до центра масс [м]: 1

Расстояние от дна до центра масс [м]: 0.2128

Показатель адиабаты атмосферы: 1.4

Молярная масса воздуха [кг/моль]: 0.029

Плотность воздуха на нулевой высоте [кг/м³]: 1.2754

Аэродинамический коэффициент тупающего момента: 0.000002

Коэффициент демпфирующего момента: 0.00004

Коэффициент силы Магнуса: 0

Коэффициент подъемной силы: 2

Поправочный множитель для учета влияния аэродинамического коэффициента опрокидывающего момента: 1

Начальный шаг интегрирования [с]: 0.00005

Начальная скорость [м/с]: 508

Начальный угол наклона [°]: 45

Начальный угол курса [°]: 0

Координата x точки вылета [м]: 0

Координата y точки вылета [м]: 0

Координата z точки вылета [м]: 0

Время вылета [с]: 0

Начальная скорость вращения  $\omega_1$  [рад/с]: 1050

$\omega_1$  [рад/с]: 0.2279

$\omega_2$  [рад/с]: 0.2279

81 [рад]: 0.0003

82 [рад]: 0.0003

Начальный угол поворота снаряда вокруг оси симметрии [рад]: 0

Далее >>

Рис. 1. Интерфейс программы, ввод данных для расчета

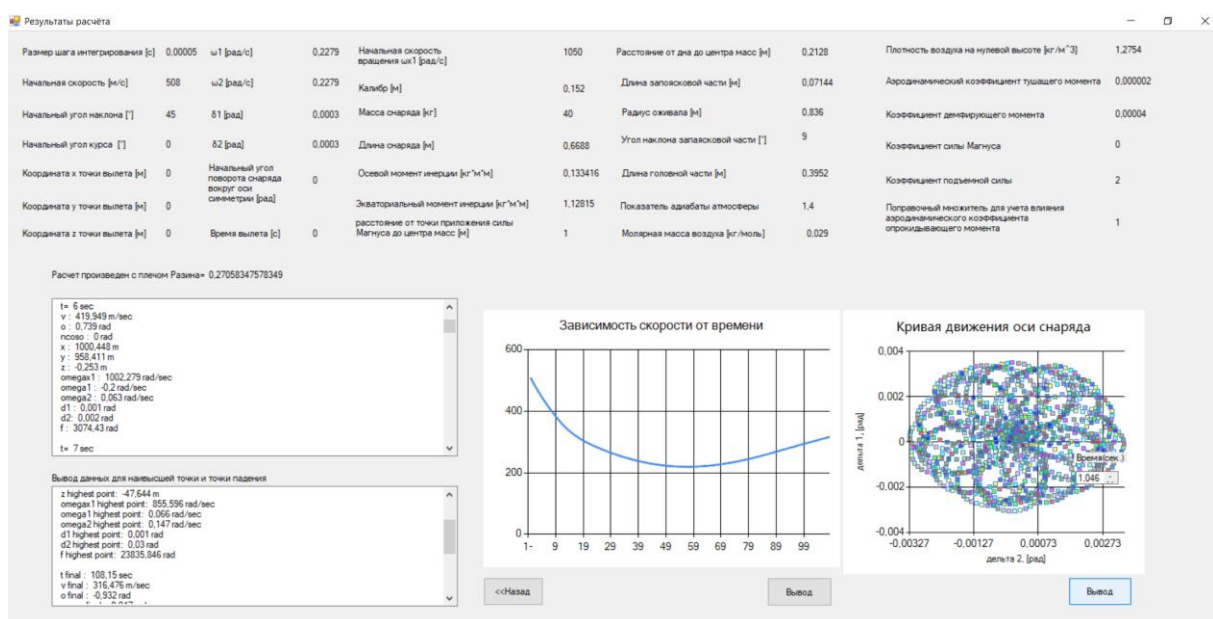


Рис. 2. Интерфейс программы, вывод полученных значений параметров



В рамках реализованного подхода функции для трех аэродинамических коэффициентов (для коэффициента лобового сопротивления, коэффициента подъемной силы, коэффициента опрокидывающего момента) были получены с помощью программы предварительного анализа аэродинамических характеристик Missile Datcom (Исследовательская лаборатория ВВС, Огайо, США) [6]. Остальные 3 аэродинамических коэффициента, по результатам проведенного анализа, при решении поставленной задачи мало заметно влияют на параметры траектории. Программная реализация кода выполнена на статически типизированном языке программирования C++. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений организовано по методу Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Двенадцать параметров траектории рассчитываются от точки старта до точки падения, автоматически выводятся данные для вершины траектории. Также в интерфейс программы встроена возможность построения пространственной кривой движения оси снаряда и графика изменения скорости по времени.

**Результаты.** В результате проведенных исследований получены параметры траекторий для трех различных снарядов. Полученные значения из программы были сравнены с данными из таблиц стрельбы. Наблюдается хорошее согласование параметров точки падения снаряда, представленных в таблицах и из расчетов. Рассогласование менее 2-х процентов.

**Заключение.** Путем модификации одной из существующих численных моделей была разработана программа, способная производить расчет параметров траектории снарядов, её интерфейс показан на рисунках 1 и 2. В математической модели учитывается индивидуальная геометрия каждого снаряда и берутся в расчет зависимости от числа Маха и угла атаки для большего количества аэродинамических коэффициентов, чем в ранее реализованных моделях в баллистике. В концепции дальнейшего развития предполагается возможность оперативного изменения математической модели для различных конфигураций снарядов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соркин Р.Е. Динамика полета неуправляемых ракет. – М.: Дом техники, 1963. – 215 с.
2. Фарапонов В.В., Савкина Н.В., Биматов В.И. Математическое моделирование движения неуправляемого осесимметричного тела в однородном поле силы тяжести: учеб. пособие. –Томск: СТУ, 2017. – 60 с.
3. Коновалов А.А., Николаев Ю.В. Внешняя баллистика. – М.: ЦНИИ информации, 1979. – 228 с.
4. Паршин Ж.П., Чунаев А.М., Логвин А.М. Внешняя баллистика: учеб. пособие. – Пенза: ПАИИ, 1984. – 387 с.
5. Степанов В.П., Фарапонов В.В. Внешняя баллистика ствольных систем. – Томск.: Изд-во Том. Ун-та, 2001. – 192 с.
6. Rosema C., Doyle J., Blake W. Missile Datcom User's Manual – 2014 Revision. // Flight Dynamics Directorate, Wright Patterson Air Force Base (OH), Air Force Research Laboratory (US), Technical Report AFRL-RQWP-TR-2014-0281. – 2014

УДК 539.12.01

**РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПОЛНОГО ОПЫТА ДЛЯ ДВОЙНОГО ФОТОРОЖДЕНИЯ МЕЗОНОВ  
НА НУКЛОНАХ**И.А. Дементьев

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.И. Фикс  
 Национальный исследовательский Томский политехнический университет,  
 Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050  
 E-mail: [iad@tpu.ru](mailto:iad@tpu.ru)

**COMPLETE EXPERIMENT PROBLEM FOR DOUBLE PION PHOTOPRODUCTION  
ON NUCLEONS**I.A. Dementjev

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.I. Fix  
 Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050  
 E-mail: [iad@tpu.ru](mailto:iad@tpu.ru)

**Abstract.** A special method developed for solving the complete experiment problem is applied to photoproduction of two pseudoscalar mesons on nucleons. Independent sets of observables are obtained, which make it possible to find the amplitudes of this processes up to possible discrete ambiguities.

**Введение.** Одной из важнейших реакций в физике элементарных частиц в резонансной области энергий является процесс фоторождения двух пи-мезонов на нуклонах



Информация о спиновых амплитудах этого процесса практически необходима для решения множества проблем в этой области. Достаточно перечислить лишь такие, как проблема недостающих резонансов, динамика каскадных распадов барионов, изотопическая структура адронного тока, значения радиационных ширин распада барионных резонансов, кварковая структура барионов и др. Сравнение оценок амплитуд, полученных в ходе анализа соответствующей экспериментальной информации, со значениями, рассчитанными в рамках различных теоретических моделей, является одним из важнейших методов проверки наших представлений об основных механизмах этих реакций. Из этого далеко не полного перечня проблем, решаемых с помощью двойного фоторождения мезонов на нуклонах, становится очевидной необходимость получения надежных оценок, соответствующих спиновых, а также мультипольных амплитуд этих процессов.

К настоящему времени в результате проведения систематических прецизионных измерений реакций  $\gamma + N \rightarrow \pi + \pi + N$  (1) получена обширная экспериментальная информация об их дифференциальных сечениях и некоторых поляризационных характеристиках. Кроме этого, усилиями ряда научных групп определенные успехи были достигнуты в теоретическом исследовании процессов фоторождения мезонов на нуклонах и легчайших ядрах. Последние во многих случаях использовались в качестве эффективных нейтронных мишеней. Накопленные сведения позволяют поставить вопрос о

возможности извлечения значений амплитуд реакций  $\gamma + N \rightarrow \pi + \pi + N$  (1) на основе решения проблемы полного опыта.

В широком смысле проблема полного опыта может быть сформулирована, как определение объема экспериментальной информации, необходимой и достаточной для однозначного нахождения амплитуд, описывающих данный процесс.

Число независимых наблюдаемых для произвольного процесса вида  $a + b \rightarrow c + d + \dots$  равно  $(n/2)^2$ , где  $n$  определено, как произведение  $(2S_a + 1)(2S_b + 1) \dots$ . Здесь  $S_a$ ,  $S_b$  и т.д. суть спины частиц, принимающих участие в реакции. Для реакции  $\gamma + N \rightarrow \pi + \pi + N$  (1) это число оказывается равным 8, так что общее число независимых наблюдаемых равно  $(8/2)^2 = 16$ . Решение задачи сводится к выбору из 16 наблюдаемых минимального набора, обеспечивающего однозначное определение всех амплитуд реакции  $\gamma + N \rightarrow \pi + \pi + N$  (1).

**Постановка задачи.** Так как наблюдаемые представляют собой линейные комбинации квадратов амплитуд, математическая формулировка проблемы приводит к необходимости решения системы квадратных уравнений

$$\sum_{i,j=1}^M x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь  $H_{ij}^{(\alpha)}$  - известные матрицы размерности  $M \times M$ . Неизвестными  $x_i$  в этой системе являются вещественные и мнимые части искомых амплитуд, а столбец свободных членов  $b^{(\alpha)}$  - значения различных наблюдаемых величин, полученные в эксперименте.

Проблема полного опыта может быть теперь сформулирована следующим образом:

- 1) Каким должно быть число  $N$  наблюдаемых (то есть, число уравнений в системе

$$\sum_{i,j=1}^M x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \dots, N. \quad (2)), \text{ которое допускает однозначное решение. Очевидно, что } N \geq M.$$

- 2) Как определить, какие именно наблюдаемые следует выбрать, так чтобы уравнения в системе были независимыми.

Для решения нами был использован метод, развитый ранее в работе [1]. Метод позволяет

установить определенность системы  $\sum_{i,j=1}^M x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \dots, N. \quad (2)$  с точностью до двоичных дискретных неоднозначностей. Используя этот метод, мы смогли найти минимальный набор наблюдаемых для процессов фоторождения двух пи-мезонов на нуклонах.

**Описание метода.** Пусть имеется система квадратных уравнений

$$\sum_{i,j=1}^M x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \dots, N. \quad (2). \text{ Для определенности положим } N = M.$$

$$\sum_{i,j=1}^M x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \dots, N \quad (3)$$

Каков критерий того, что система 
$$\sum_{i,j=1}^M x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \dots, N \quad (3)$$
 имеет единственное решение  $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0\}$  (с точностью до возможных дискретных неоднозначностей)?

Очевидно, что задачу можно переформулировать следующим образом: при каких условиях отображение множества  $N$  переменных  $x_i$  на множество  $N$  переменных  $b^{(\alpha)}$ , задаваемое выражением

$$\sum_{i,j=1}^M x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \dots, N \quad (3),$$

является взаимно однозначным в окрестности точки

$x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0\}$ . Достаточным условием однозначности является неравенство нулю якобиана перехода  $x_i \rightarrow b^{(\alpha)}$ , то есть

$$J(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} \right| = \det \left[ \sum_{j=1}^N H_{ij}^{(\alpha)} x_j \right] \neq 0 \quad (4)$$

Используя известное правило сложения определителей, имеем

$$J(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{k_1}^N \dots \sum_{k_N}^N x_{k_1} \dots x_{k_N} \det[w^{(1)}(k_1) \dots w^{(N)}(k_N)] \neq 0 \quad (5)$$

где

$$w^{(\alpha)}(k) = (H_{1k}^{(\alpha)} \dots H_{Nk}^{(\alpha)})^T$$

**Результаты.** Таким образом, приходим к следующему необходимому условию. Для того, чтобы

система 
$$\sum_{i,j=1}^M x_i H_{ij}^{(\alpha)} x_j = b^{(\alpha)}, \alpha = 1, \dots, N \quad (3)$$
 имела единственное решение (с точностью до возможных дискретных неоднозначностей), необходимо, чтобы по крайней мере один из определителей

$$\det[w^{(1)}(k_1) \dots w^{(N)}(k_N)] = \det \begin{pmatrix} H_{1k_1}^{(1)} & \dots & H_{1k_N}^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{Nk_1}^{(1)} & \dots & H_{Nk_N}^{(N)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

был отличен от нуля. Необходимо отметить, что индексы  $k_\alpha$  не обязательно должны быть различными. Если ненулевых определителей нет, то набор векторов, конечно, не может быть линейно независимым. Более того, если это условие выполнено только для одного набора  $\{k_\alpha\}$ , в то время, как остальные определители равны нулю, это условие является также и достаточным. В случае нахождения ненулевого определителя для более чем одного набора  $\{k_\alpha\}$ , может случиться так, что для некоторого набора значений переменных  $x^0$  множество векторов  $V^{(\alpha)}$ , определенных как

$$v^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N H_{1j}^{(\alpha)} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N H_{Nj}^{(\alpha)} x_j \end{pmatrix} \quad (7)$$

окажется линейно зависимым, хотя такой исход является маловероятным.

Используя сформулированный выше критерий, мы выделили наборы наблюдаемых величин для реакции  $\gamma + N \rightarrow \pi + \pi + N$  (1), измерение которых позволяет в принципе находить соответствующие амплитуды. Полученные результаты опубликованы в работе [2].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arenhoevel H., Leidemann W., Tomusiak E. On complete sets of polarization observables // Nuclear Physics A. – 1998. – V. 641. – P. 517-527.
2. Fix A., Dementjev I. Simplification of the complete-experiment problem for photoproduction of two pseudoscalar mesons on a nucleon in a truncated partial-wave analysis // Physical Review C. – 2022. – V. 106, no.2, – P. 024613.

УДК 519.642.2

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО  
НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА–КПП**С.А. Синюков

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.В. Шаповалов  
 Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
 Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050  
 E-mail: [ssaykmh@yandex.ru](mailto:ssaykmh@yandex.ru)

**INVESTIGATION OF PARTICULAR ASYMPTOTIC SOLUTIONS  
OF THE ONE-DIMENSIONAL NONLOCAL FISCHER–KPP EQUATION**S.A. Siniukov

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.V. Shapovalov  
 Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050  
 E-mail: [ssaykmh@yandex.ru](mailto:ssaykmh@yandex.ru)

**Abstract.** For the particular case of the one-dimensional nonlocal population Fisher-KPP equation under consideration, a family of leading terms of the semiclassical asymptotics is constructed in an explicit form, and their qualitative behavior is investigated. The behavior of the asymptotic solutions and of the corresponding numerical solutions constructed using the software package Comsol Multiphysics is compared.

**Введение.** В работах [1, 2] и в ряде других работ авторов теория квазиклассического приближения В. П. Маслова [3] систематически применялась к нелокальному обобщению классического популяционного уравнения Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова (Фишера-КПП), которое в (1+1)-мерном случае (т. е. имеется одна временная  $t$  и одна пространственная  $x$  координаты) без учета конвективных членов в безразмерных обозначениях можно записать в виде

$$u_t(x, t) = D\Delta_x u(x, t) + a(x, t)u(x, t) - \kappa u(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} b(x, y, t)u(y, t)dy. \quad (1)$$

В уравнении (1)  $u(x, t)$  характеризует популяционную плотность; коэффициенты  $a(x, t)$  и  $b(x, y, t)$  являются гладкими функциями своих пространственных аргументов, которые растут не быстрее, чем полиномиально в каждой точке  $t$ ; параметр диффузии  $D$  играет роль асимптотического параметра,  $D \rightarrow 0$ ; вещественный параметр нелинейности  $\kappa > 0$ ;  $u_t = \partial_t u = \partial u / \partial t$ ,  $\Delta_x u = \partial^2 u / \partial x^2$ . Выражение  $\int_{-\infty}^{\infty} b(x, y, t)u(y, t)dy$  имеет смысл нелокальных конкурентных потерь с функцией влияния  $b(x, y, t)$ .

В статье [2] были построены в явном аналитическом виде семейства асимптотических решений задачи Коши для уравнения (1) с учетом конвективных членов в классе траекторно-сосредоточенных функций, однако свойства построенных асимптотик подробно не изучались.

В данной работе внимание уделяется исследованию особенностей поведения асимптотических решений, полученных с точностью  $O(D^{3/2})$  в рамках комплексного метода квазиклассического

приближения Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна–Маслова (ВКБ-Маслова) [1, 2] для частных случаев уравнения (1).

**Частные асимптотические решения в явном виде.** Используя результаты, полученные в работе [2], были построены в явном виде семейства асимптотических решений для частного случая нелокального уравнения Фишера–КПП (1), где, из соображений интегрируемости системы Эйнштейна–Эренфеста (см. [2]), функции  $a(x, t)$  и  $b(x, y, t)$  выбираются в виде  $a(x, t) = a = const$  и  $b(x, y, t) = b(x - y)$  Главный член квазиклассической асимптотики в рамках изложенного в [2] формализма находится с точностью  $O(D^{3/2})$ . Функция влияния берется в гауссовом виде

$$b(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b}} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2\sigma_b^2}\right). \quad (2)$$

Данные асимптотики (обозначим их  $u_n(x, t, D)$ ) обладают следующими свойствами:  $u_{2n-1}(x, t, D) \equiv 0$ , а  $u_{2n}(x, t, D)$  даются выражениями

$$u_{2n}(x, t, D) = v_{2n}^{(0)}(x, t, C_n), \quad (3)$$

где

$$v_n^{(0)}(x, t, C_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} \left[ \frac{Z^{(+)}(t)}{Z^{(-)}(t)} \right]^{n/2} H_n \left( \sqrt{\frac{b}{DZ^{(-)}(t)Z^{(+)}(t)}} \Delta x \right) v_0^{(0)}(x, t, C_n), \quad (4)$$

$$v_0^{(0)}(x, t, C_n) = N_D \sqrt{\frac{W^{(-)}(t)}{bZ^{(-)}(t)} \frac{\sigma_n(t, D)}{\sigma_n(0, D)}} \exp\left[ \frac{1}{2D} \frac{W^{(-)}(t)}{Z^{(-)}(t)} \right], N_D = \sqrt[4]{\frac{b}{\pi D}}, \quad (5)$$

$b = b(0)$ , функции  $Z^{(\pm)}(t)$ ,  $W^{(\pm)}(t)$  имеют вид

$$W^{(\pm)}(t) = \pm Z^{(\pm)}(t) = \mp 2bt + 1, \quad (6)$$

а постоянные  $C_n$  определяются как

$$C_n = (\sigma_{2n}(0, D), x_{2n}(0, D), \alpha_{2n}^{(2)}(0, D)); \sigma_{2n}(0, D) = \sqrt[4]{\frac{4\pi D}{b} \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!}}, x_{2n}(0, D) = x_0, \alpha_{2n}^{(2)}(0, D) = \frac{D(1 + 4n)}{b}. \quad (7)$$

**Исследование частных асимптотических решений нелокального уравнения Фишера–КПП.**

Придем к исследованию асимптотических решений нелокального уравнения Фишера–КПП вида (1), определяемых выражениями (3)–(7). Приведенные ниже графики представлены в безразмерных обозначениях и отражают качественное поведение рассматриваемых решений.

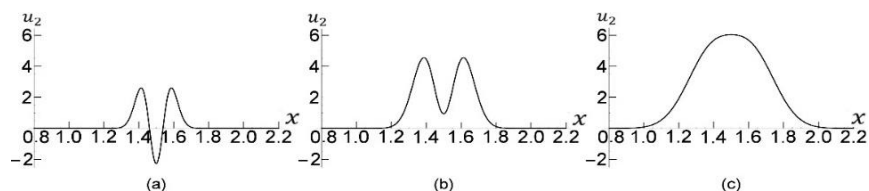


Рис. 1. Асимптотическое решение  $u_2(x, t, D)$  уравнения (1), задаваемое выражениями (3)–(7) при  $n = 2$ ; (a)  $t = 0$ ; (b)  $t = 2$ ; (c)  $t = 9$

На рис. 1 приведен график асимптотического решения (4) для следующих значений параметров уравнения (1):

$$D = 0,001, x_0 = 1,5, a = 1, \kappa = 1, \sigma_b = 1,2, \quad (8)$$

на временном промежутке  $T = [0, 9]$ . Значения  $n$  выбираются четными, т.к. для нечетных значений  $u_{2n-1}(x, t, D) \equiv 0$ .

В качестве косвенной проверки соответствия асимптотических решений (3)–(7) уравнения (1) были построены численные решения уравнения (1) с помощью программного пакета Comsol Multiphysics с параметрами (8) и начальным условием

$$u_{num,n}(x, 0, D) = v_n^{(0)}(x, 0, C_n), \quad (9)$$

таким же, как и для асимптотического решения, представленного на рис. 1. Здесь  $v_n^{(0)}(x, 0, C_n)$  дается выражением (4) при  $t = 0$ . Решение, построенное методом конечных элементов с использованием треугольной сетки, показано на рис. 2.

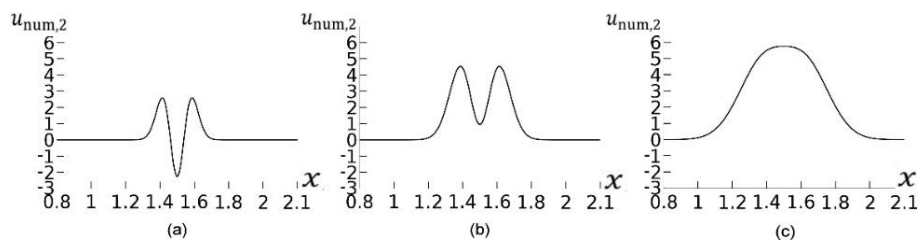


Рис.2. Численное решение  $u_{num,2}(x, t, D)$  уравнения (1) с начальным условием  $v_2^{(0)}(x, 0, C_2)$  вида (9);  
(a)  $t = 0$ ; (b)  $t = 2$ ; (c)  $t = 9$

**Обсуждение результатов.** Из поведения асимптотик, представленных на рис.1 на временном промежутке  $T = [0, 9]$ , можно наблюдать преобразование начального распределения с несколькими начальными пиками  $(n/2 + 1)$  в распределение близкое по форме гауссову распределению. Численное решение уравнения (1) с начальным условием  $v_n^{(0)}(x, 0, C_n)$ , полученное методом конечных элементов, демонстрирует поведение, представленное на рис. 2, аналогичное поведению асимптотик на рис. 1. Это наблюдение может служить аргументом в пользу справедливости полученных асимптотических решений на временном промежутке  $T = [0, 9]$  и позволяет оценить временные промежутки  $\Delta T = [t_0, t_0 + \Delta t]$ , на которых справедлива построенная квазиклассическая асимптотика путем сравнения аналитических и численных решений.

Что касается «нефизических» отрицательных значений при  $t = 0$  асимптотических решений (рис. 1, 2), то они существуют в течение относительно короткого времени и не оказывают существенного влияния на общее поведение эволюции плотности  $u(x, t)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Одномерное уравнение Фишера-Колмогорова с нелокальной нелинейностью в квазиклассическом приближении // Известия вузов, Физика. –2009. –Т.52. – №.9. – С.14–23.
2. Sharovalov A.V., Trifonov A.Yu. An application of the Maslov complex germ method to the one-dimensional nonlocal Fisher–KPP equation // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2018. – V. 15. – No 6. – 1850102 (30 p).
3. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977. – 384 с.



УДК 669

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ ОБРАЗЦОВ  
ИЗ ПОРИСТОГО НИКЕЛИДА ТИТАНА**

Эльвин С. Джелилов, А. В. Ветрова, Эльвиз С. Джелилов

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. А.А. Козулин

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: elvin\_dj2000@mail.ru

**NUMERICAL SIMULATION FOR DETERMINATION OF EFFECTIVE ELASTIC MODULI  
OF SAMPLES FROM POROUS TITANIUM NICKELIDE**

Elvin S. Djelilov, A.V. Vetrova, Elviz S. Djelilov

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Ph.D. A.A. Kozulin

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: elvin\_dj2000@mail.ru

***Abstract.** The mechanical characteristics of samples made of a porous TiNi alloy under conditions of uniaxial compression and shear have been studied. The results of high-resolution three-dimensional neutron tomography were used to create geometric models of porous samples suitable for strength calculations by the finite element method. Numerical simulation methods are used to determine the features of the deformation behavior of the studied samples, which consist in the appearance of orthotropy of their elastic properties. The orthotropy of elastic properties is realized in the skeleton of samples during the passage of a combustion wave during synthesis and self-organization of through porosity during the redistribution of gases. It has been established that the values of the elastic moduli of titanium nickelide with a porosity of about 60% correspond to those of some bone tissues, which may be a prerequisite for using the alloy in the creation of osteoreplacing implants.*

**Введение.** Особый класс специальных медицинских сплавов имеет сложную пористую структуру, но упругие и механические свойства некоторых из них сравнимы с аналогичными показателями костных тканей, что благоприятно сказывается на их механической биосовместимости [1]. Поэтому при вынужденных оперативных вмешательствах имплантаты на основе пористого сплава никелида титана (TiNi) занимают особое место. Однако из-за недостаточной изученности область применимости этих материалов в настоящее время не до конца ясна, а некоторые исследователи даже высказывают сомнения о возможности использования пористого никелида титана из-за его недостаточной биосовместимости [2]. Однако благодаря своим уникальным свойствам пористые сплавы на основе TiNi являются объектом, привлекающим особое внимание специалистов в области медицинского материаловедения из-за их проницаемости, сверхэластичности и проявления эффекта памяти формы при изменении температуры. Такое сочетание свойств делает эти материалы перспективными для имплантологии благодаря дополнительному наличию сквозной пористости и гидрофильной шероховатой поверхности, обеспечивающих быструю инвазию и регенерацию костной ткани внутри пористого имплантата. Численное моделирование при исследовании медицинских материалов используется для предсказания

того, насколько они механически схожи с биологическими тканями. Выбор определяющих уравнений, которые должны описывать все аспекты механического поведения, включая деформационную реакцию при наличии анизотропии механических свойств, является одним из фундаментальных вопросов, возникающих при моделировании таких материалов. Наличие порового пространства при различных условиях нагружения и особенности механического поведения в локальных областях каркаса пористости должны учитываться в явном и неявном виде используемыми физико-математическими моделями [3].

**Экспериментальная часть.** Для проведения численных расчетов по определению напряженно-деформированного состояния и нахождению модулей упругости на начальном этапе вычислительного эксперимента была создана геометрическая модель образца с явно выраженной структурой пористости, пригодная для использования в конечно-элементном анализе. Для этого разработан алгоритм создания твердотельной CAD-модели по данным рентгеновской томографии, включающий следующие шаги:

1. Получение результатов трехмерной компьютерной рентгеновской томографии в виде массива графических файлов, детализирующих послойные поперечные срезы пористого образца никелида титана. Каждый участок изображается серией светлых островков материала на черном фоне, так как сквозная пористость материала находится в пределах 60 %.

2. На всех срезах с помощью специализированного программного обеспечения изменен уровень восприимчивости структурных элементов, удалены шумовые артефакты рентгеновской томографии. Полученные послойные срезы последовательно соединялись в программном обеспечении InVesalius 3.2 [4] с воспроизведением трехмерной реконструкции пористой цилиндрической заготовки в stl-формате.

3. Полученная STL-модель в таком виде не подходит для моделирования, поскольку состоит только из набора замкнутых поверхностей и не является твердым телом. Далее stl-модель была преобразована в твердотельную модель с помощью современных подходов реинжиниринга в программе SpaceClaim. После этого 3D-реконструкцию цилиндрического образца в формате САПР можно применять в любой программе инженерного анализа, основанной на методе конечных элементов.

4. Для исследования анизотропии свойств достаточно исследовать несколько призматических образцов представительного объема ( $3 \times 3 \times 6$  мм<sup>3</sup>). При этом представительные модели образцов готовили путем виртуального вырезания пористых призматических объемов из центральной части цилиндрической модели заготовки.

Численно исследовано напряженно-деформированное состояние пористого элемента представительного объема при одноосном и сдвиговом нагружении [5]. Результаты численного решения использовались для определения эффективных модулей упругости в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Математическая модель решения задачи была представлена системой дифференциальных уравнений механики сплошной среды в общем виде. Система уравнений состояла из уравнений равновесия, геометрических соотношений Коши и определяющих соотношений в виде закона Гука. Система уравнений решалась численно с использованием метода конечных элементов и Лагранжевого подхода в декартовой прямоугольной системе координат. Эффективные модули упругости (модули Юнга  $E_{ij}$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_{ij}$  и модули сдвига  $G_{ij}$ , при  $i, j=1, 2, 3$ ) в трех перпендикулярных направлениях для пористого образца определялись на основе упругих откликов системы, полученных численно для 6 условий нагружения (3 нормальных и 3 сдвиговых) при малых деформациях.

**Результаты.** С использованием численного моделирования установлено, что из-за структурных составляющих TiNi, формируемых направленным фронтом горения при СВС, в каркасе сплавов с открытой пористостью проявляются эффекты анизотропии, которые подразделяются на: анизотропию механических свойств; структурную анизотропию; геометрическую анизотропию. В нашем случае ортотропия является частным случаем анизотропии. Хрупкие перемычки каркаса составляют пористую основу сплава. В поле внешней нагрузки в сложнапряженном состоянии такие многомасштабные системы сверхупруго деформируются и накапливают повреждения на разных масштабных уровнях, образуя новые геометрические конфигурации пор и перемычек, тем самым усложняя исходную структуру. Численно показано, что при квазистатическом сжатии концентраторы максимальных напряжений пористых образцов NiTi возникают в местах перемычек пор.

Таблица 1

Рассчитанные значения эффективных модулей упругости

$E_{11}$ , ГПа	$E_{22}$ , ГПа	$E_{33}$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$G_{23}$ , ГПа	$G_{31}$ , ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
2,98	3,24	3,01	1,21	1,31	1,22	0,231	0,238	0,233

Для исследованных пористых объемов материала были рассчитаны средние значения эффективных модулей упругости (таблица 1). Установлено, что исследуемые пористые объемы обладают ортотропными упругими свойствами. Значения упругих модулей имеют максимальные значения в направлении фронта горения вдоль основной оси цилиндрической заготовки. Из картины распределения напряжений установлено, что напряжения, действующие под углом 45 градусов к направлению сжатия, являются источниками зарождения разрушения одноосно сжатого пористого сплава NiTi.

*Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grunsven W., Goodall R., Reilly G.C. Highly Porous Titanium Alloy: Fabrication and Mechanical Properties // Journal of Biomechanics. – 2012. – V. 45. – P. 339.
2. Узунян Н.А. Обоснование применения новых отечественных сверхупругих сплавов титана в дентальной имплантологии (экспериментально-клиническое исследование): Диссертация на соискание ученой степени доктора медицинских наук / Первый Московский государственный медицинский университет им. И.М. Сеченова. – Москва, 2019. – 179 с.
3. Smolin, I., Eremin, M., Makarov, P.V., Evtushenko, E., Kulkov, S., Buyakova, S, Brittle porous material mesovolume structure models and simulation of their mechanical properties // AIP Conference Proceedings. – 2014. – 1623. – Pp. 595-598.
4. Amorim P.; Moraes T.; Silva J.; Pedrini H. InVesalius: An interactive rendering framework for health care support // Lecture Notes in Computer Science; Springer International Publishing. – 2015. – V. 9474. – Pp. 45-54.
5. Marchenko E.S., Kozulin A.A., Yasenchuk Y.F., Vetrova A.V., Volinsky A.A., Zhang Yi Numerical and experimental study of porous NiTi anisotropy under compression // Journal of Materials Research and Technology. – 2023. – V 22. – Pp. 3502-3510.

УДК 536.24

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ  
НАНОЖИДКОСТИ В ПОЛОСТИ С ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ**Е.В. Шулепова

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет  
Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [elena.vasilevna.1996@mail.ru](mailto:elena.vasilevna.1996@mail.ru)**MATHEMATICAL SIMULATION OF NATURAL CONVECTION OF NANOFLUID  
IN A CAVITY WITH A HEAT-GENERATING ELEMENT**E.V. Shulepova

Scientific Supervisor: Prof., Dr. M.A. Sheremet  
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [elena.vasilevna.1996@mail.ru](mailto:elena.vasilevna.1996@mail.ru)

**Abstract.** This work deals with numerical simulation of natural convective heat transfer of nanofluid in a square cavity with a local heater of constant heat generation flux. Analysis has been performed using 2D unsteady Oberbeck-Boussinesq equations for nanofluid and heat conduction equation for the heat-generating element. The finite difference method of the second order of accuracy has been used for numerical simulation. Effects of the heat generation strength and nanoparticles volume fraction on nanofluid flow and heat transfer have been studied.

**Введение.** Передача тепла за счет естественной конвекции в замкнутых областях изучается многими исследовательскими группами во всем мире, особенно применительно к задачам интенсификации транспортных процессов в машиностроении, микроэлектронике и энергетике [1-3]. В последнее время с целью интенсификации теплообмена в качестве рабочей среды используют наножидкости [4, 5].

Целью исследования является численный анализ естественной конвекции наножидкости в квадратной полости с тепловыделяющим элементом. Рассматривается возможность охлаждения внутреннего тепловыделяющего элемента за счет использования наножидкости (рисунок 1).

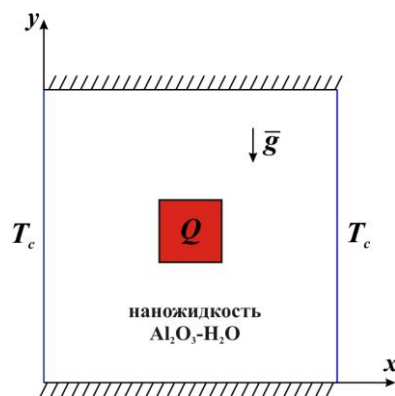


Рис. 1. Область решения задачи

Предполагается, что наножидкость является вязкой несжимаемой теплопроводной средой. Горизонтальные стенки полости считаются адиабатическими, а вертикальные – изотермическими с температурой  $T_c$ . Считается, что наножидкость состоит из наночастиц оксида алюминия [6], а в качестве базовой жидкости используется вода.

**Описание математической модели.** Математическое описание данной задачи проводится на основе однофазного приближения для наножидкости с экспериментальными соотношениями для эффективной теплопроводности и динамической вязкости. Определяющие уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_{nf} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{nf} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho_{nf} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{nf} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\rho\beta)_{nf} g (T - T_c) \quad (3)$$

$$(\rho c)_{nf} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_{nf} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Уравнение теплопроводности внутри тепловыделяющего элемента имеет следующий вид

$$(\rho c)_{hs} \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{hs} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q \quad (5)$$

Здесь  $x, y$  – координаты декартовой системы координат,  $t$  – время,  $\rho_{nf}$  – плотность наножидкости,  $\rho_{hs}$  – плотность материала источника энергии,  $c_{hs}$  – теплоемкость материала источника энергии,  $\mu_{nf}$  – динамическая вязкость наножидкости,  $\beta_{nf}$  – термический коэффициент объемного расширения наножидкости,  $\lambda_{nf}$  – теплопроводность наножидкости,  $\lambda_{hs}$  – теплопроводность материала источника энергии.

Начальные и граничные условия для сформулированной системы дифференциальных уравнений (1)–(5) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau = 0: \quad & u = v = 0, \quad T = T_c; \\ \tau > 0: \quad & u = v = 0, \quad T = T_c \quad \text{на вертикальных стенках;} \\ & u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{на горизонтальных стенках;} \\ & u = v = 0, \quad \begin{cases} T_{nf} = T_{hs} \\ -\lambda_{nf} \frac{\partial T_{nf}}{\partial \bar{n}} = -\lambda_{hs} \frac{\partial T_{hs}}{\partial \bar{n}} \end{cases} \quad \text{на границах внутреннего источника энергии} \end{aligned} \quad (6)$$

Сформулированная краевая задача (1)–(6) была решена в преобразованных переменных «функция тока – завихренность» методом конечных разностей. Численные исследования проведены в широком диапазоне изменения определяющих параметров, характеризующих свободно-конвективный теплообмен наножидкости внутри замкнутой полости: число Рэлея ( $Ra = 10^4$ – $10^6$ ), объемная доля наночастиц ( $\phi = 0$ –4%).

**Результаты и заключение.** В результате работы была создана вычислительная модель и численный алгоритм для исследования естественной конвекции наножидкости в квадратной полости с

тепловыделяющим элементом. Разработан программный код для проведения вычислительных экспериментов. В результате моделирования получены распределения изолиний функции тока и температуры, а также интегральных параметров.

*Работа выполнена при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karlapalem V., Dash S.K. On the enhancement of natural convection heat transfer with multi-branching fins // International Journal of Thermal Sciences. – 2023. – Vol. 183. – P. 107868.
2. Husain S., Khan S.A. A review on heat transfer enhancement techniques during natural convection in vertical annular geometry // Cleaner Engineering and Technology. – 2021. – Vol. 5. – P. 100333.
3. Huang C.-H., Chen W.-Y. A natural convection horizontal straight-fin heat sink design problem to enhance heat dissipation performance // International Journal of Thermal Sciences. – 2022. – Vol. 176. – P. 107540.
4. Gurdal M., Arslan K., Gedik E., Minea A.A. Effects of using nanofluid, applying a magnetic field, and placing turbulators in channels on the convective heat transfer: A comprehensive review // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2022. – Vol. 162. – P. 112453.
5. Esfe M.H., Bahiraei M., Hajbarati H., Valadkhani M. A comprehensive review on convective heat transfer of nanofluids in porous media: Energy-related and thermohydraulic characteristics // Applied Thermal Engineering. – 2020. – Vol. 178. – P. 115487.
6. Ho C.J., Liu W.K., Chang Y.S., Lin C.C. Natural convection heat transfer of alumina-water nanofluid in vertical square enclosures: An experimental study // International Journal of Thermal Sciences. – 2010. – Vol. 49. – P. 1345–1353.

УДК 532.5, 536.21

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ В КАНАЛАХ  
С НАГРЕВАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ НА ОСНОВЕ РЕШЁТОЧНОГО МЕТОДА  
БОЛЬЦМАНА**

Н.С. Гибанов

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [Gibanov@mail.tsu.ru](mailto:Gibanov@mail.tsu.ru)

**NUMERICAL SIMULATION OF MIXED CONVECTION IN CHANNELS WITH HEAT  
GENERATING ELEMENTS USING LATTICE BOLTZMANN METHOD**

N.S. Gibanov

Scientific Supervisor: Professor, Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [Gibanov@mail.tsu.ru](mailto:Gibanov@mail.tsu.ru)

***Abstract.** In this work, mathematical modeling of mixed convection in a channel with heating elements has been carried out using the lattice Boltzmann method. The developed mathematical model has been verified by comparison with the results obtained by other authors, as well as using other numerical methods. The conducted comparative analysis confirms the operability of the developed numerical algorithm. The double distribution function approach has been used in the research process, the BGK operator has been used as the decomposition of the collision operator. As a result of the research, distributions of temperature and velocity fields have been obtained at different flow rates of the cooling medium.*

**Введение.** На сегодняшний день имеется множество различных численных методов, позволяющих решать задачи теплообмена. Одним из наиболее динамично развивающихся численных методов является решёточный метод Больцмана. Данный метод является относительно новым, и обладает рядом преимуществ перед уже зарекомендовавшими себя ранее вычислительными подходами [1-5]. Кроме того, решёточный метод Больцмана позволяет проводить вычисления процессов тепломассопереноса в случае разреженных сред, однофазных и многофазных, пористых и с добавлением наночастиц, а также позволяет учитывать многие другие особенности физических процессов [6-8].

В настоящей работе рассматривается задача смешанной конвекции в канале с нагревательным элементом с использованием решёточного метода Больцмана и метода конечных разностей. В процессе исследования была проведена оценка скорости потока несжимаемой ньютоновской жидкости, а также высоты  $h$  нагревательного элемента на распределение термогидродинамических характеристик.

**Физическая и математическая постановка.** На рисунке 1 представлена область решения задачи. В двумерном канале высотой  $H$  и длиной  $L$  в начальный момент времени располагается покоящаяся ньютоновская несжимаемая жидкость с постоянными теплофизическими свойствами и с температурой  $T_{in}$ . На нижней стенке канала, на расстоянии  $H$  от входа располагается нагревательный элемент длиной

$H$  и высотой  $h$  с температурой  $T_h$ . Верхняя и нижняя стенки канала считаются адиабатическими. На входе в канал задаётся входящий поток среды с температурой  $T_0$  и горизонтальной составляющей вектора скорости  $U_0$ . Представленная задача была решена с помощью метода конечных разностей и решёточного метода Больцмана.

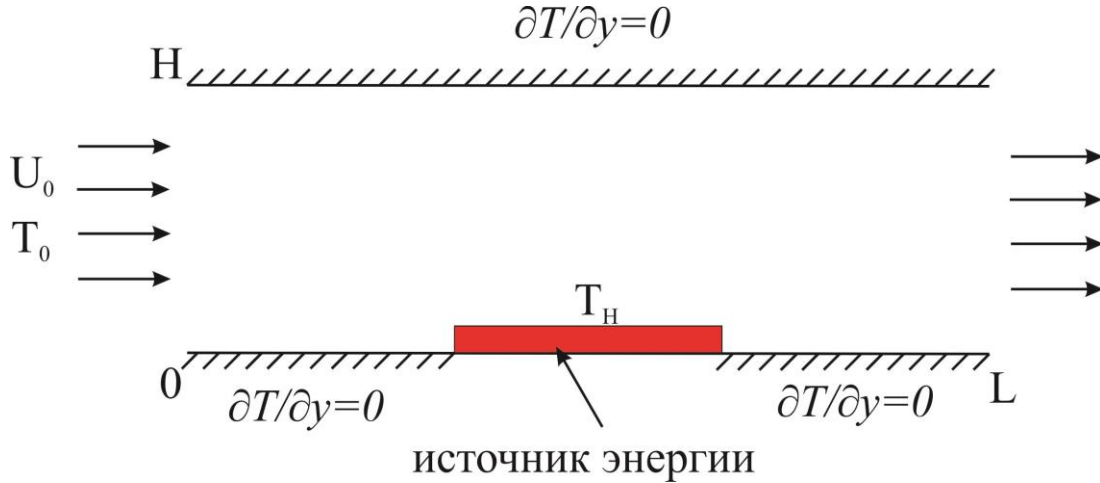


Рис. 1. Область решения задачи

При решении задачи решёточным методом Больцмана, в качестве основного уравнения выступает кинетическое уравнение Больцмана [2, 3, 9]:

$$f_k(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = f_k(x, y, t)(1 - \omega_f) + \omega_f f_k^{eq}(x, y, t) + \Delta t F_i c_{y_i} \quad (1)$$

$$g_k(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = g_k(x, y, t)(1 - \omega_g) + \omega_g g_k^{eq}(x, y, t) \quad (2)$$

где  $f_k$  –  $k$ -ая функция распределения (количество связей  $k$  определяется в зависимости от структуры решетки, на основе которой будут проводиться дальнейшие расчёты),

$$f_k^{eq} = w_k \rho \left( 1 + \frac{\bar{u} \cdot \bar{c}_k}{c_s^2} + \frac{(\bar{u} \cdot \bar{c}_k)^2}{2c_s^4} - \frac{\bar{u} \cdot \bar{u}}{2c_s^2} \right) - k\text{-ая функция локального равновесного распределения, } w_k -$$

весовые коэффициенты,  $\omega_f = \frac{1}{3\nu + 0.5}$  – формула для расчёта функции распределения для движения ( $\nu$  –

кинематическая вязкость),  $f_k$  и  $f_k^{eq}$  – функции распределения и локального равновесного распределения,

используемые для определения макроскопических параметров скорости и плотности,  $g_k$  и  $g_k^{eq}$  –

функции распределения и локального равновесного распределения для определения температуры,

$\omega_g = \frac{1}{3a + 0.5}$  – параметр, используемый при расчете функций распределения для температуры ( $a$  –

коэффициент теплопроводности).

В случае решения задачи методом конечных разностей, система уравнений в естественных переменных может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$



$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$(\rho c_p)_f \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

где  $x, y$  – координаты;  $t$  – время;  $u, v$  – проекции вектора скорости на оси  $x, y$ ;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $T$  – температура;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

**Результаты и заключение.** В процессе решения представленной задачи, был проведен анализ влияния скорости потока газа ( $10^2 \leq Re \leq 10^3$ ) и высоты нагревательного элемента ( $0.05H \leq h \leq 0.2H$ ) на распределение термогидродинамических характеристик в исследуемой области. При решении задачи решёточным методом Больцмана использовалась двумерная схема D2Q9, а также link-wise схема граничных условий упругого отскока. При решении задачи методом конечных разностей использовались преобразованные безразмерные переменные «функция тока – завихренность».

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда № 22-79-00291.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wolf-Gladrow D. A. Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models – an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
2. Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G. Vigen E.M. The Lattice Boltzmann Method. Springer International Publishing Switzerland 2017.
3. Mohamad A. A. Lattice Boltzmann Method: Springer-Verlag London, 2011.
4. Sobhani M. Taguchi optimization of combined radiation/natural convection of participating medium in a cavity with a horizontal fin using LBM /M. Sobhani, H. A. Tighchi, J.A. Esfahani // Physica A. – 2018. – Vol. 509. – P. 1062-1079.
5. Wolf-Gladrow D.A. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models // Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – P. 319.
6. Sukop M.C., D.T. Thorne Jr. Lattice Boltzmann Modeling // Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. – P. 177.
7. Succi S. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond // Clarendon Press. Oxford, 2001. – P. 304.
8. Farhat H., Lee J.S., Kondaraju S. Accelerated Lattice Boltzmann Model for Colloidal Suspensions // New York: Springer Science Business Media, 2014. – 158.
9. Gibanov N.S., Rashidi M.M., Sheremet M.A. Comparative analysis of the lattice Boltzmann method and the finite difference technique of thermal convection in closed domains with heaters // International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. – 2022. – Vol. 32(11). – P. 3579-3597.

УДК 536.24

**РЕЖИМЫ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОБОГРЕВАЕМОЙ  
КВАДРАТНОЙ ПОЛОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕРАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ**С.А. Михайленко

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [stepanmihaylenko@gmail.com](mailto:stepanmihaylenko@gmail.com)**NATURAL CONVECTION MODES IN A DIFFERENTIALLY-HEATED SQUARE CAVITY UNDER  
NON-UNIFORM ROTATION**S.A. Mikhailenko

Scientific Supervisor: Prof., Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [stepanmihaylenko@gmail.com](mailto:stepanmihaylenko@gmail.com)

**Abstract.** A study of convective heat transfer inside a differentially-heated square cavity under the effect of non-uniform rotation has been carried out. The angular velocity of the cavity has been changed with time on periodic law. The governing equations have been written using non-primitive variables such as stream function and vorticity. The main system of equations has been solved using the finite difference method on the uniform grid. The influence of cavity heating and rotation modes on the intensity of heat transfer in the cavity has been studied.

**Введение.** Изучение естественной конвекции на сегодняшний день широко распространено в обширном круге исследований, включающих обеспечение устойчивости течений, замкнутые области с источниками энергии, пористые среды, охлаждение электронного оборудования, наножидкости, материалы с изменяющимися фазовыми состояниями и многое другое [1]. Интересной областью исследований является естественная конвекция в условиях вращения. Вращающиеся системы можно часто встретить, например, при проектировании различных теплообменников [2], выращивании кристаллов [3], проектировании систем охлаждения электронной аппаратуры [4]. Часто вращающиеся системы могут быть подвержены неравномерному вращению, поэтому в данной работе проводится исследование режимов естественной конвекции в неравномерно вращающейся дифференциально обогреваемой квадратной полости, изображенной на рис. 1.

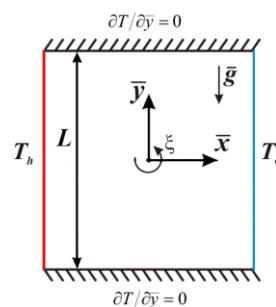


Рис. 1. Область решения

Полость высоты  $L$  заполнена ньютоновской несжимаемой жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска, и вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\xi = \xi_0 \frac{[1 - \sin(ft)]}{2}$ .

Полость имеет левую нагреваемую стенку, поддерживаемую при постоянной температуре  $T_h$ , и правую охлаждаемую стенку, поддерживаемую при постоянной температуре  $T_c$ . Горизонтальные стенки являются теплоизолированными. Анализируемый режим течения является двумерным и ламинарным.

**Уравнения и методы.** Определяющие уравнения основаны на законах сохранения массы, импульса и энергии и записаны с использованием преобразованных переменных функция тока (1) и завихренность (2):

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \quad (1)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2)$$

Таким образом, система уравнений Обербека-Буссинеска в виде уравнения Пуассона для функции тока (3), уравнения дисперсии завихренности (4) и уравнения энергии (5) записывается в безразмерном виде и представляется в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} = -\bar{\omega} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \tau} + u \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left( \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{Ra}{Pr \cdot Ta} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \left\{ \tau \frac{1}{2} \left[ 1 - \sin \left( \frac{f}{\xi_0} \tau \right) \right] \right\} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \left\{ \tau \frac{1}{2} \left[ 1 - \sin \left( \frac{f}{\xi_0} \tau \right) \right] \right\} \right] - \frac{Ra_\xi}{Pr \cdot Ta} \left( y \frac{\partial \theta}{\partial x} - x \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \frac{1}{4} \left[ 1 - \sin \left( \frac{f}{\xi_0} \tau \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr \cdot \sqrt{Ta}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

При этом возникают безразмерные комплексы:  $Pr = \nu/\alpha$  – число Прандтля;  $Ra = g\beta\Delta TH^3/(\alpha\nu)$  – выталкивающее число Рэлея;  $Ra_\xi = \beta\Delta TH^4\xi_0^2/(\alpha\nu)$  – вращательное число Рэлея;  $Ta = \xi_0^2 H^4/\nu^2$  – число Тейлора. Стоит заметить, что вращательное число Рэлея не является независимым и полностью обуславливается выбором остальных параметров, в то время как выталкивающее число Рэлея и число Тейлора могут быть определяющими для течения и теплообмена жидкости. Число Прандтля фиксируется –  $Pr = 0.7$ . Полость вращается с изменяющейся во времени по периодическому закону угловой скоростью  $\xi = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sin \left( \frac{f}{\xi_0} \tau \right) \right]$ , где  $\xi_0$  – максимально возможная для выбранного режима скорость вращения полости, а  $f$  – частота изменения угловой скорости. При этом частота изменения угловой скорости  $f$  может служить управляющим параметром.

Начальные и граничные условия выглядят следующим образом:

$$\tau = 0: \quad \psi = \omega = \theta = 0 \quad \text{при} \quad -0.5 \leq x \leq 0.5 \quad \text{и} \quad -0.5 \leq y \leq 0.5$$

$$\tau > 0: \quad \psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \theta = 1 \quad \text{при } x = -0.5 \text{ и } -0.5 \leq y \leq 0.5$$

$$\psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \theta = 0 \quad \text{при } x = 0.5 \text{ и } -0.5 \leq y \leq 0.5$$

$$\psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = -0.5, 0.5 \text{ и } -0.5 \leq x \leq 0.5$$

Основные уравнения (3)–(5), иллюстрирующие режимы конвективного теплообмена в дифференциально обогреваемой вращающейся квадратной полости, с соответствующими начальными и граничными условиями решены методом конечных разностей на равномерной сетке. Уравнение (3) было аппроксимировано с использованием центральных разностей. Полученные системы линейных алгебраических уравнений решены с помощью метода последовательной верхней релаксации. Уравнения (4) и (5) дискретизированы с использованием центральных разностей для диффузионных членов и монотонной аппроксимации А.А. Самарского для конвективных членов. Полученные соотношения вычислялись методом прогонки.

Интенсивность теплообмена оценивается при помощи среднего числа Нуссельта вдоль нагреваемой стенки: 
$$\overline{Nu} = \int_{-0.5}^{0.5} \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=-0.5} dy$$

**Результаты и выводы.** Численное моделирование режимов конвективного теплообмена в дифференциально обогреваемой квадратной полости, подверженной неравномерному вращению, проведено для широкого диапазона определяющих параметров:  $Pr = 0.7$ ,  $Ta = 10^3$ – $10^6$ ,  $Ra = 10^5$ ,  $Ra = 1.8 \cdot 10$ – $1.8 \cdot 10^4$ . Получены и описаны распределения температуры и изолинии функции тока в течение полного оборота полости. Исследовано влияние режимов нагрева полости и вращения на интенсивность теплообмена в полости. Проведен анализ влияния центробежной силы на теплоперенос.

*Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kakac S., Aung W., Viskanta R. Natural convection: Fundamentals and applications. – Springer Berlin Heidelberg, 1985. – 1181 p.
2. Ali M.A.M., El-Maghlany W.M., Eldrainy Y.A., Attia A. Heat transfer enhancement of double pipe heat exchanger using rotating of variable eccentricity inner pipe // Alexandria Engineering Journal. – 2018. – Vol. 57(4). – P. 3709–3725.
3. Fedyushkin A. Heat and mass transfer during crystal growing by the Czochralski method with a submerged vibrator // Journal of Physics: Conference Series. – 2019 – Vol. 1359. – P. 012054.
4. Banerjee S., Mukhopadhyay A., Sen S., Ganguly R. Thermomagnetic Convection in Square and Shallow Enclosures for Electronics Cooling // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. – 2009. – Vol. 55(10). – P. 931–951.

УДК 536.24

**О РЕЖИМАХ ЗАРЯДКИ И РАЗРЯДКИ В ТЕПЛОАККУМУЛИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ  
С ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ОТКРЫТОМ КАНАЛЕ**

М.С. Астанина

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет  
Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050  
E-mail: [astanina.marina@bk.ru](mailto:astanina.marina@bk.ru)

**ABOUT CHARGING AND DISCHARGING MODES IN A THERMAL ENERGY STORAGE SYSTEM  
WITH A POROUS MEDIUM IN A RECTANGULAR OPEN CHANNEL**

M.S. Astanina

Scientific Supervisor: Prof., Dr. M.A. Sheremet  
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050  
E-mail: [astanina.marina@bk.ru](mailto:astanina.marina@bk.ru)

***Abstract.** In the study numerical simulation of mixed convection in an open rectangular channel in the presence of a porous insert has been performed. Newtonian medium with temperature-dependent viscosity has been considered as a working fluid. The charging mode implies the hot flow at the inlet to the channel, while the discharging mode implies the cold flow. The peculiarities of these modes have been shown for a wide range of governing parameters.*

**Введение.** Тепловые системы с неоднородными пористыми материалами имеют большое количество практических применений в области промышленности, разработке тепловых систем аккумулирования энергии и строительстве зданий. Пористые среды являются эффективным способом регулирования теплонакопления и теплоотвода в различных приложениях из-за повышения интенсивности теплообмена при взаимодействии рабочей среды с введённой пористой структурой. В этом ключе использование численных методов – наиболее доступный из методов прогнозирования работы подобных систем по сравнению с экспериментальными способами. Данные численного моделирования могут быть использованы на этапах проектирования или отладки работы различных элементов тепловых систем.

**Математическая модель.** Схема моделируемой задачи показана на рисунке 1. Рассматривается конвективное течение в открытом прямоугольном канале с пористым материалом. На входе в канал подаётся набегающий поток, инициирующий течение. Поведение системы рассматривается в два этапа: режим зарядки (подача горячего потока) и режим разрядки (подача холодного потока). В качестве рабочей среды рассматривается ньютоновская среда с переменной вязкостью. В качестве закона зависимости рассматривается соотношение Сазерленда [1]. Горизонтальные границы канала теплоизолированы. Для моделирования теплового взаимодействия между пористым материалом и рабочей жидкостью используется локально-равновесная тепловая модель, в рамках которой температуры двух фаз считаются одинаковыми.

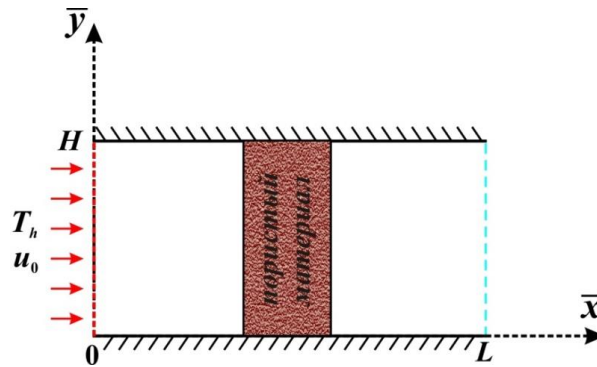


Рис. 1. Схематическая постановка задачи

Таким образом, определяющие уравнения, описывающие изучаемый процесс, можно записать следующим образом [2]:

- Для чистой среды

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 (\mu \omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega)}{\partial y^2} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{2}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

- Для пористой среды (модель Дарси-Бринкмана-Форхгеймера)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (4)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{Re} \left( \frac{\partial^2 (\mu \omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega)}{\partial y^2} - \varepsilon \frac{\mu \omega}{Da} \right) + \varepsilon^2 \frac{Gr}{Re^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{2\varepsilon}{Re} \left[ \frac{\varepsilon \mu}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\varepsilon v}{2Da} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - \frac{\varepsilon^2 C_F}{\sqrt{Da}} \omega \sqrt{u^2 + v^2} + \quad (5)$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 C_F}{\sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{Da}} \left( u^2 \frac{\partial u}{\partial y} + uv \frac{\partial v}{\partial y} - uv \frac{\partial u}{\partial x} - v^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\alpha_{pm}/\alpha_f}{Re \cdot Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

Безразмерные преобразованные переменные (функция тока и завихрённость) были введены следующим образом:

$$\left\{ \bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}}, \bar{v} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}}; \left\{ \bar{\omega} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}. \right. \right.$$

В определяющей системе дифференциальных уравнений (1)–(6) были использованы следующие безразмерные параметры и переменные:

$$Pr = \mu_0 / \rho \alpha, Da = K / H^2, C_f = 1.75 / \sqrt{150 \epsilon^3}, Gr = \rho^2 g \beta \Delta T H^3 / \mu_0^2, Re = \rho H u_0 / \mu_0$$

$$x = \bar{x} / H, y = \bar{y} / H, \tau = t u_0 / H, \theta = (T - T_0) / \Delta T, \mu = \bar{\mu} / \mu_0, u = \bar{u} / u_0, v = \bar{v} / u_0, \psi = \bar{\psi} / (u_0 H), \omega = \bar{\omega} H / u_0$$

В начальный момент времени  $\tau = 0$  рабочая среда была неподвижна, и все переменные считались равными нулю ( $\theta = \psi = \omega = 0$ ). В качестве граничных условий были использованы следующие соотношения:

$$\tau > 0: \quad \psi = y, \quad \omega = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{на } x = 0 \text{ и } 0 \leq y \leq 1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{на } x = A \text{ и } 0 \leq y \leq 1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{на } y = 0 \text{ и } 0 < x < A$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \psi = 1 \quad \text{на } y = 1 \text{ и } 0 < x < A$$

(7)

на границе пористого материала и чистой среды:

$$\begin{cases} \psi_{pm} = \psi_f \\ \partial \psi_{pm} / \partial n = \partial \psi_f / \partial n \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_{pm} = \omega_f \\ \partial \omega_{pm} / \partial n = \partial \omega_f / \partial n \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_{pm} = \theta_f \\ (\lambda_{pm} / \lambda_f) (\partial \theta_{pm} / \partial n) = \partial \theta_f / \partial n \end{cases}$$

Записанные дифференциальные уравнения с использованием переменных «функция тока – завихренность – температура» с соответствующими начальными и граничными соотношениями решались методом конечных разностей на структурированной равномерной расчётной сетке. Для реализации решения был создан программный код на языке программирования C++ с возможностью визуализации результатов. Разработанная методика решения задач конвективного теплообмена была тщательно верифицирована на нескольких модельных течениях.

**Результаты и заключение.** Проведено численное моделирование смешанной конвекции в прямоугольном канале с пористым материалом. В первую очередь анализ полученных результатов проводился с точки зрения оценки эффективности работы системы как теплоаккумулирующего элемента. В качестве получаемых характеристик рассматривались поля температуры и изолинии функции тока, распределения средней температуры пористой вставки, а также коэффициент эффективности разрядки. Полученные в итоге данные отражают возможность регулирования свойств аккумуляции тепловой энергии за счёт варьирования определяющих параметров: числа Рейнольдса и Грасгофа, а также свойства пористого материала (пористость, число Дарси). Представленные теоретические результаты могут быть использованы при проектировании и сервисном обслуживании теплоаккумулирующих систем в строительстве, а также в микроэлектронике.

*Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского научного фонда (22-79-10341).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Armengol J.M., Bannwart F.C., Xamán J., Santos R.G. Effects of variable air properties on transient natural convection for large temperature differences // International Journal of Thermal Sciences. – 2017. – Vol. 120. – P. 63-79.
2. Астанина М.С., Шермет М.А. Моделирование смешанной конвекции жидкости с переменной вязкостью в частично пористом горизонтальном канале с источником тепловыделения // Компьютерные исследования и моделирование. – 2019. – Т. 11, № 1. – С. 95-107.

УДК 536.24

**ВЛИЯНИЕ СОСТАВА НАНОЧАСТИЦ НА СВОБОДНУЮ КОНВЕКЦИЮ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ  
НАНОЖИДКОСТИ В ПОЛОСТИ С ТЕПЛОТЫДЕЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ И ПОРИСТЫМИ  
РЕБРАМИ**Д.С. Лоенко

Научный руководитель: профессор, д. ф.-м. н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: [whiteink@bk.ru](mailto:whiteink@bk.ru)**EFFECT OF THE NANOPARTICLES COMPOSITION ON THE NON-NEWTONIAN NANOFLUID  
FREE CONVECTION IN A CAVITY WITH A HEAT-GENERATING ELEMENT AND POROUS FINS**D.S. Loenko

Scientific Supervisor: Prof., Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: [whiteink@bk.ru](mailto:whiteink@bk.ru)

**Abstract.** *This work is devoted to the study of the nanoparticles material effect on the pseudoplastic nanofluid natural convection in a closed cavity in the presence of a heater and porous fins. The following substances have been used as nanoadditives:  $Al_2O_3$ , Cu, CuO,  $TiO_2$ . The process is described by non-stationary differential equations based on the conservation laws of mass, momentum and energy based on the non-primitive variables "stream function and vorticity". The pseudoplastic properties of the base fluid have been described by the Ostwald-de Waele power law. The effective nanosuspension parameters have been calculated using experimental correlations reflecting the temperature effect.*

**Описание исследования.** Данная работа посвящена оценке влияния химического состава нанодобавок на свободно-конвективное течение неньютоновской наножидкости в замкнутой квадратной полости, представленной на рисунке 1. На нижней стенке полости расположен источник постоянного объемного тепловыделения  $Q$ , над ним теплопроводная медная подложка. На подложке находятся пористые ребра, состоящие из алюминиевой пены. Стенки корпуса поддерживаются при постоянной низкой температуре  $T_c$ . Внешние границы по периметру подложки теплоизолированы. Полость заполнена смесью карбоксиметилцеллюлозы (КМЦ) с водой и наночастицами. Базовая жидкость КМЦ/вода проявляет свойства псевдопластичности, что означает снижение вязкости при увеличении скорости деформации. Такие жидкости являются классом неньютоновских сред, течение которых описывается различными моделями. В данной работе используется степенной закон Оствальда-де-Вилия [1]:

$$\tau_{ij} = 2\mu_{nf} D_{ij} \quad (1)$$

Здесь  $\mu_{nf}$  – эффективный коэффициент вязкости наножидкости, который вычислялся с помощью соотношения Гуо и др. [2]:



$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}} = \left(1 + 2.5\phi + 6.5\phi^2\right) \left(1 + 350 \frac{\phi}{d_p}\right) \quad (2)$$

В соотношении (2) присутствует вязкость базовой жидкости, которая, в соответствии со степенным законом, определялась следующим соотношением:  $\mu_{bf} = K(2D_{kl}D_{kl})^{\frac{n-1}{2}}$ , где  $K$  – коэффициент плотности потока;  $D_{kl}$  – компоненты тензора скоростей деформации;  $n$  – показатель поведения жидкости, который характеризует свойства среды. Таким образом, если  $n > 1$ , то жидкость является дилатантной. У такой среды вязкость увеличивается с ростом скоростей деформации. При  $n = 1$  вязкость жидкости имеет линейную зависимость от скорости деформации. При  $n < 1$  среда является псевдопластичной, как в нашем случае. Для разного содержания КМЦ в воде показатель поведения изменяется от 0.81 до 0.91. Именно наличие псевдопластичных свойств у базовой среды позволяет интенсифицировать конвективный теплообмен в полости, что делает такую жидкость эффективной в задачах охлаждения нагретых элементов.

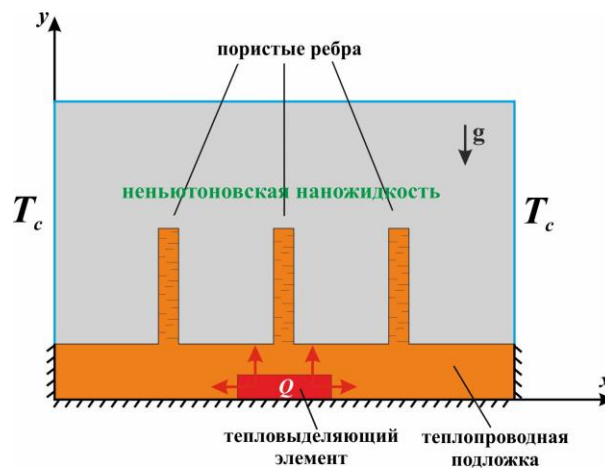


Рис. 1. Область решения задачи

Также в вопросах эффективного теплоотвода от нагретых элементов можно использовать частицы нанометрового размера, которые имеют более высокую теплопроводность в отличие от привычных рабочих жидкостей. В данной работе используемые наночастицы представляют собой следующие вещества:  $Al_2O_3$ , Cu, CuO,  $TiO_2$ . Все свойства материалов представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Свойства материалов

Свойства	$c$ , Дж/кг·К	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\lambda$ , Вт/м·К
Базовая жидкость КМЦ/вода [3]	4179	997.1	0.613
Источник энергии (Кремний) [4]	710	2330	150
Подложка (Cu) [4]	385	8920	400
Пористые ребра (алюминиевая пена) [5]	897	2700	205
Наночастицы [6]	Cu	385	8933
	$Al_2O_3$	765	3970
	CuO	535.6	6500
	$TiO_2$	686.2	4250

Добавление наночастиц в базовую среду позволяет увеличить теплопроводность всей наножидкости. В нашем случае для вычисления эффективной теплопроводности используется экспериментальная корреляция Жанга и Чой [7], которая отражает влияние температуры, а также объемной доли наночастиц и их диаметра:

$$\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_{bf}} = (1-\phi) + 0.01 \frac{\lambda_p}{\lambda_{bf}} \phi + (18 \cdot 10^6) \frac{d_{bf}}{d_p} Re^2 Pr \phi \quad (3)$$

Поставленную задачу описывает система нестационарных дифференциальных уравнений Навье-Стокса в преобразованных безразмерных переменных «функция тока и завихренность». Приближение Буссинеска используется для описания влияния выталкивающей силы, а модель Дарси-Бринкмана – для описания транспортных процессов внутри пористых ребер.

Описанная задача решалась на основе метода конечных разностей. Разработанный алгоритм решения и вычислительный комплекс на языке C++ были протестированы на более простых задачах [8]. Также было оценено влияние сеточных параметров на сходимость решения. В ходе исследования был проведен анализ влияния состава наночастиц, а также их объемной доли на возможность интенсификации отвода тепла от нагретого элемента. Результаты рассматривались в виде распределения линий тока и изотерм, а также по средней температуре в источнике тепла.

*Работа выполнена при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khezzar L., Siginer D., Vinogarov I. Natural convection of power law fluids in inclined cavities // International Journal of Thermal Sciences. – 2012. – Vol. 53. – P. 8-17.
2. Guo S.S., Luo Z.Y., Tao W., Zhao J.F., Cen K.F. Viscosity of monodisperse silica nanofluids // Bull. Chin. Ceram. Soc. – 2006. – Vol. 25 (5). – P. 52-55.
3. Nabwey H.A., Rashad A.M., Khan W.A., Alshber S.I. Effectiveness of magnetize flow on nanofluid via unsteady natural convection inside an inclined U-shaped cavity with discrete heating // Alexandria Engineering Journal. – 2022. – Vol. 61. – P. 8653-8666.
4. Khan A.U., Ullah N., Al-Zubaidi A., Nadeem S. Finite element analysis for CuO/water nanofluid in a partially adiabatic enclosure: Inclined Lorentz forces and porous medium resistance // Alexandria Engineering Journal. – 2022. – Vol. 61. – P. 6477-6488.
5. Astanina M.S., Buonomo B., Manca O., Sheremet M.A. Three-dimensional natural convection of fluid with temperature-dependent viscosity within a porous cube having local heater // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2022. – Vol. 139. – P. 106510.
6. Maleki H., Safaei M.R., Alrashed A.A.A.A., Kasaeian A. Flow and heat transfer in non-Newtonian nanofluids over porous surfaces // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. – 2019. – Vol. 135. – P. 1655-1666.
7. Jang S.P., Choi S.U.S. Effects of Various Parameters on Nanofluid Thermal Conductivity // Journal of Heat Transfer. – 2007. – Vol. 129. – P. 617-623.
8. Loenko D.S., Sheremet M.A. Convective heat transfer of a pseudoplastic nanosuspension within a chamber with two heated wall sections of various heat fluxes // Symmetry. – 2022. – Vol. 14. – P. 2688.

УДК 536.24

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ  
В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

Д.В. Акулова

Научный руководитель: профессор, д. ф.-м. н. М.А. Шеремет  
Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050  
E-mail: [nobelsofi@gmail.com](mailto:nobelsofi@gmail.com)

**MATHEMATICAL SIMULATION OF BIOHEAT TRANSFER IN TISSUES  
FOR ONE-DIMENSIONAL APPROACH**

D.V. Akulova

Scientific Supervisor: Prof. Dr. M.A. Sheremet  
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050  
E-mail: [nobelsofi@gmail.com](mailto:nobelsofi@gmail.com)

***Abstract.** This work is devoted to the numerical analysis of time-dependent bioheat transfer inside biological tissue under one-dimensional formulation. Analysis has been performed using 1D time-dependent Pennes equation with metabolic heat generation and spatial heating based on the Beer's law. It should be noted that the initial condition has been obtained as a result of solution to the steady Pennes equation with boundary conditions of first and third kinds without outer spatial heating. The developed computational code has been verified using analytical data of Deng and Liu for initial temperature and temperature profiles for different times. A good agreement has been achieved.*

**Введение.** Изучение тепло- и массопереноса в биологических тканях является актуальной задачей современной биомеханики применительно к анализу данных опухолевого роста. Перенос тепла в тканях является сложным процессом, зависящим от различных параметров: теплопроводности тканей, выделения метаболической теплоты, интенсивности перфузии крови, конвекции. Также, взаимодействие ткани с нервами, венами и артериями создает сложную морфологию. Вены и артерии транспортируют кровь, которая переносит тепло к ткани. При наличии опухоли появляются изолированные области с различными теплофизическими характеристиками. Разработка математических моделей, способных описать эти процессы, является актуальной задачей современной прикладной математики и биомеханики. Применение таких моделей возможно в результате анализа криохирургии и гипертермии при развитии рака. Таким образом, существует необходимость в неинвазивных методах диагностики рака на ранних стадиях, что может быть реализовано путем анализа теплового состояния биологических тканей.

**Описание математической модели.** Рассматривается одномерная задача теплообмена в биологических тканях (рисунок 1). За основу математической модели принимается уравнение Пеннеса [1], из которого виден линейный характер зависимости источников тепла биоткани от искомого температурного поля.



Рис. 1. Область решения задачи

Дифференциальное уравнение теплообмена в биологических тканях [1] имеет следующий вид:

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho_b c_b \omega_b (T_a - T) + Q_m + Q_r \quad (1)$$

Здесь  $x$  – координата декартовой системы координат,  $t$  – время,  $\rho_t$  – плотность биологической ткани,  $c_t$  – теплоемкость биологической ткани,  $T_a$  – артериальная температура,  $\lambda_t$  – теплопроводность биологической ткани,  $\rho_b$  – плотность крови,  $c_b$  – теплоемкость крови,  $\omega_b$  – интенсивность перфузии,  $Q_m$  – объемное внутреннее тепловыделение,  $Q_r(x, t) = \eta P_0(t) \exp(-\eta x)$  – объемный нагрев для борьбы с раковыми клетками в виде нагрева за счет лазерного излучения или микроволнового воздействия или ультразвуковой терапии,  $\eta$  – коэффициент рассеяния,  $P_0(t)$  – временная зависимость для мощности нагрева на поверхности биологической ткани.

Уравнение (1) решается с различными начальными и граничными условиями для одномерной прямоугольной системы координат. Начальное температурное распределение может быть получено, как:

$$t = 0, \quad T = T_a \quad (2)$$

или решением уравнения (1) для стационарных условий

$$\begin{cases} \lambda_t \frac{d^2 T_0(x)}{dx^2} + \rho_b c_b \omega_b [T_a - T_0(x)] + Q_m = 0 \\ T_0(x) = T_c, \quad x = H \\ -\lambda_t \frac{dT_0(x)}{dx} = \alpha_0 [T_f - T_0(x)], \quad x = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где  $T(x, 0) = T_0(x)$  – установившееся температурное поле перед началом внешнего объемного нагрева;  $T_c$  – температура тела, часто рассматривается как постоянная;  $\alpha_0$  – коэффициент теплообмена между поверхностью кожи и окружающей средой, обусловленный как конвективным теплообменом, так и тепловым излучением;  $T_f$  – температура окружающей среды. Здесь поверхность кожи определена на границе  $x = 0$ , а граница ткани – при  $x = H$ .

Граничные условия для уравнения (1), зависящие от времени, можно представить в виде граничного условия второго рода

$$-\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} = f_1(t), \quad x = 0 \quad (4)$$

или в виде граничного условия третьего рода

$$-\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_f [f_2(t) - T], \quad x = 0, \quad (5)$$

где  $f_1(t)$  – зависящий от времени поверхностный тепловой поток,  $f_2(t)$  – зависящая от времени температура охлаждающей среды и  $\alpha_f$  – коэффициент тепловой конвекции между средой и поверхностью кожи.

Температура тела считалась постоянной

$$T = T_c, \quad x = H \quad (6)$$

При решении поставленной нестационарной краевой задачи, включающей дифференциальное уравнение (1), начальное условие, полученное в результате решения стационарной задачи (3), а также граничное условие третьего рода на поверхности ткани (5) и граничное условие первого рода на внутренней границе биологической ткани (6), используется метод конечных разностей [2]. Область, в которой определяется решение дифференциальных уравнений, покрывается расчетной равномерной сеткой – дискретным множеством точек. При переходе от дифференциальной задачи к разностной задаче все дифференциальные операторы, входящие в уравнение (1), а также в начальные и граничные условия, заменяются их разностными аналогами. Конечным этапом работы являлась программная реализация задачи на языке программирования C++ с дальнейшей визуализацией результатов.

**Результаты и заключение.** Разработанный программный код был протестирован с использованием аналитических данных [3]. Рисунок 2 иллюстрирует сравнение профилей температуры, полученных в результате использования разработанного алгоритма, с аналитическими данными работы [3] в различные моменты времени. Наблюдаемые расхождения на левой границе, по всей видимости, обусловлены некорректными значениями коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды, представленными в работе [3].

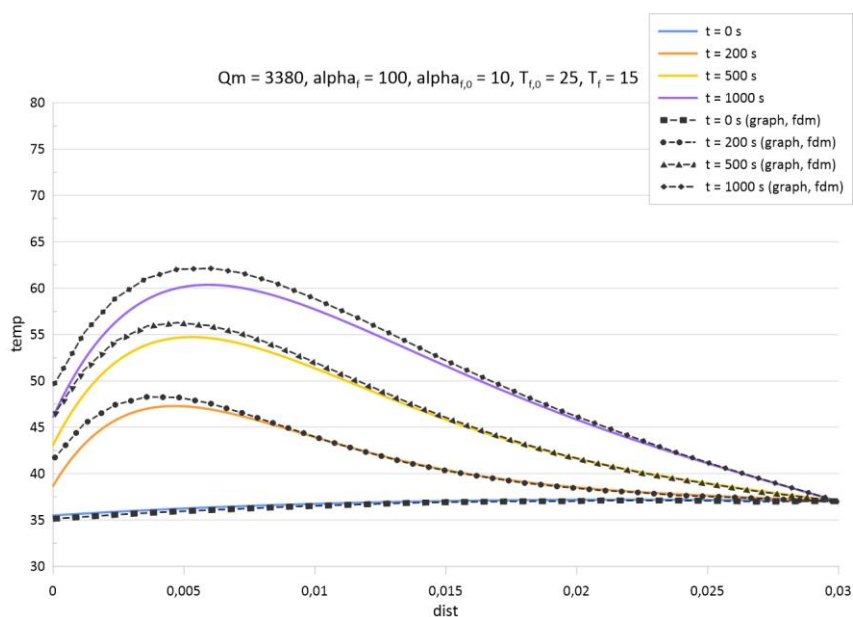


Рис. 2. Сравнение профилей температуры с аналитическими данными [3]

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pennes H.H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm // J. Appl. Physiol. – 1948. – Vol. 1, Iss. 2. – P. 93-122.
2. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
3. Deng Z.S., Liu J. Analytical study on bio heat transfer problems with spatial or transient heating on skin surface or inside biological bodies // J. Biomech. Eng. – 2002. – Vol. 124, Iss. 6. – P. 638-649.

Научное издание

# ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

## Том 3. Математика

Сборник научных трудов  
XX Международной конференции студентов, аспирантов  
и молодых ученых

Компьютерная верстка *С.А. Поробова*

Зарегистрировано в Издательстве ТПУ  
Размещено на корпоративном портале ТПУ  
в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета



**ИЗДАТЕЛЬСТВО**  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ