



ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

Сборник научных трудов
XVII Международной конференции студентов, аспирантов
и молодых ученых

РОССИЯ, ТОМСК, 21 – 24 апреля 2020 г.

Том 3. Математика

PROSPECTS OF FUNDAMENTAL SCIENCES DEVELOPMENT

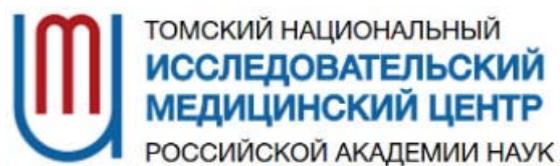
Abstracts
XVII International Conference of Students
and Young Scientists

RUSSIA, TOMSK, April 21 – 24, 2020

Volume 3. Mathematics



Национальный
исследовательский
Томский
государственный
университет



MINISTRY OF SCIENCE AND EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

PROSPECTS OF FUNDAMENTAL SCIENCES DEVELOPMENT

Abstracts

XVII International Conference of students, graduate students
and young scientists

April 21–24, 2020

Russia, Tomsk

Volume 3. Mathematics

Tomsk

Tomsk State University Publishing House
control system and radioelectronics

2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

Сборник научных трудов
XVII Международной конференции студентов, аспирантов
и молодых ученых

21–24 апреля 2020 г.

Россия, Томск

Том 3. Математика

Томск
Издательство Томского государственного университета
систем управления и радиоэлектроники
2020

УДК 501:004 (063)
ББК 72:32.81л0
П27

Редакционная коллегия:

И. А. Курзина, доктор физико-математических наук, доцент;
Г. А. Воронова, кандидат химических наук, доцент;
С. А. Поробова

Перспективы развития фундаментальных наук : сборник научных трудов XVII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, 21–24 апреля 2020 г., Россия, Томск. В 7 т. Т. 3. Математика / Нац. исслед. Том. политехн. ун-т, Нац. исслед. Том. гос. ун-т, Том. гос. архитектурно-строит. ун-т, Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, Том. нац. исслед. мед. центр РАН ; под ред. И.А. Курзиной, Г.А. Вороновой. – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2020. – 101, [3] с.

ISBN 978-5-86889-867-9 (т. 3)

ISBN 978-5-86889-864-8

Сборник содержит труды участников XVII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Перспективы развития фундаментальных наук», представленные на секции «Математика».

Для студентов, аспирантов, молодых ученых и преподавателей, специализирующихся в области математического моделирования и анализа данных, математических методов в физике, химии, биофизике, биологии, экономике, медицине, психологии, математической логики и приложений, вычислительной математики, а также дифференциальных уравнений.

УДК 501:004 (063)
ББК 72:32.81л0

Научное издание
ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК
Сборник научных трудов XVII Международной конференции
студентов, аспирантов и молодых ученых

Подписано в печать 15.06.20. Формат 60x84/8.

Усл. печ. л. 12,09. Тираж 100. Заказ 125.

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники.
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40. Тел. (3822) 533018.

ISBN 978-5-86889-867-9 (т. 3)
ISBN 978-5-86889-864-8



Национальный
исследовательский
Томский
государственный
университет

АВТОНОМНАЯ МАГИСТЕРСКАЯ ПРОГРАММА «ТРАНСЛЯЦИОННЫЕ ХИМИЧЕСКИЕ И БИМЕДИЦИНСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ»



Химический
факультет



САЕ Институт («Умные
материалы и технологии»)

Направление подготовки
Факультет
Форма обучения

Химия
Химический факультет
Очная с элементами
дистанционного обучения
2 года
Русский
10

Продолжительность программы
Язык обучения
Бюджетные места

Условия приёма

Приём на первый курс магистратуры проводится на конкурсной основе по заявлениям лиц, имеющих высшее образование (бакалавриат или специалитет) по результатам вступительных испытаний.

Вступительные испытания: экзамен по химии, собеседование.

Магистерская программа включает возможность обучения по программе двойного диплома совместно с университетом Chemie Paris Tech (Франция). На 2-м курсе обучение осуществляется на площадках Chemie Paris Tech. За период обучения по одной программе магистратуры возможно получить дипломы двух Университетов, углублено освоить курсы химической технологии и инженерии материалов.

КЛЮЧЕВЫЕ ДИСЦИПЛИНЫ ПРОГРАММЫ

Основы общей
иммунологии

Введение в медицинскую
биологическую химию

Молекулярные методы
в биомедицинских
исследованиях

Элементы физической
химии в процессах
жизнедеятельности

Основы клеточной
биологии
и диагностики клеточных
систем

Химические технологии
в медицине.
Биоматериаловедение

Молекулярная онкология

Основы метрологии, стандартизации и сертификации в области разработки и производства фармацевтических субстанций и биомедицинских материалов

Магистратура «Трансляционные химические и биомедицинские технологии» – ЭТО:

- междисциплинарные знания на стыке химии, биологии, фармакологии, клеточной и молекулярной биомедицины
- компетенции по проведению доклинических и клинических испытаний, разработка технологического регламента, сертификации, маркетингу и малотоннажному производству продукта

- стажировки в ведущих мировых университетах
- диплом международного уровня
- работа с новыми технологиями
- освоение полного цикла получения продукта: синтез-исследование, доклинические исследования, сертификация, маркетинг

КОНТАКТЫ

Менеджер программы: **Шаповалова Елена**, +7 (953) 928 15 49, elenas6691@gmail.com
Заявки оставляйте на сайте: smil.tsu.ru/ru



chembiomed



chembiomed



chembiomed



ПРЕИМУЩЕСТВА ПРОГРАММЫ



Обучение современным химическим и биомедицинским технологиям осуществляется на базе научных центров ТГУ, г. Томска, университетов Гейдельберга и Мюнстера (Германия)



Ведущие зарубежные и российские специалисты



Индивидуальная образовательная траектория



Более 30% учебных дисциплин составляют курсы по выбору



Востребованность специалистов по трансляционным химическим и биомедицинским технологиям

ВЕДУЩИЕ ПРЕПОДАВАТЕЛИ



Курзина Ирина Александровна
Руководитель магистерской программы:

д.ф.м.н., доцент, профессор кафедры физической и коллоидной химии ХФ ТГУ, зам. заведующего лабораторией трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины, НИ ТГУ, Томск, Россия.



Кижковская Юлия Георгиевна
Соруководитель магистерской программы:

д.б.н., профессор, зав. лабораторией трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины, НИ ТГУ, Томск, Россия. Университет Гейдельберга, Медицинский факультет, Заведующая Отделом Врожденного Иммуитета и Иммунологической Толерантности Института Трансфузионной Медицины и Иммунологии, Маннгейм, Германия.



Рябов Вячеслав Валерьевич

д.м.н., заместитель директора по научной и лечебной работе НИИ кардиологии Томского НИМЦ, ведущий научный сотрудник лаборатории трансляционной и клеточной биомедицины НИ ТГУ.



Журина Елена Георгиевна

д.м.н., профессор кафедры органической химии ХФ ТГУ, врач иммунолог-аллерголог, профессор кафедры патофизиологии СибГМУ, член российской ассоциации аллергологов и клинических иммунологов, Томск, Россия.



Хайнрих Лотар Альфред

д.х.н., в.н.с. лаборатории трансляционной клеточной и молекулярной биомедицины НИ ТГУ, Томск, Россия. President of marcotech oHG, Honorary professor of the Westphalian Wilhelms University, Muenster. Руководитель блока инновационных материалов для регенеративной медицины, Мюнстер, Германия



BIOCAD
Biopharmaceutical Company



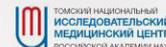
Фармконтракт
группа компаний



ООО «АЛФАРМ»
(г. Москва)



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ERGRÜNDET
SEIT 1386



Universiteit
Leiden



ParisTech

- Тестирование
- 4 курс
- Бакалавриат
- 1 и 2 семестры
- TSU
- 3 и 4 семестры
- Chimie ParisTech
- 5 семестр
- СnPT
- стажировка
- 6 семестр
- Защита
- 2 диплома
- (TSU, Chimie ParisTech)



Chimie ParisTech + TSU
Междисциплинарная
магистерская программа
двойного диплома



ТВОЯ
образовательная
траектория

**«Трансляционные химические
и биомедицинские технологии»**



Chimie ParisTech (Франция) - французская высшая школа, член объединения ParisTech. Престижное образование в направлении химической технологии

Направление подготовки:
техническое

Условия участия:

1. Средний балл успеваемости не ниже 4.5
2. Рекомендация декана факультета/научного руководителя
3. Уровень английского/французского языка не ниже upper-intermediate.

Форма обучения: очная

Продолжительность программы: 3 года

Язык обучения: французский, английский

При успешном окончании программы двойного диплома, студенты Chimie ParisTech дополнительно получают степень магистра в ТГУ, а студенты ТГУ дополнительно получают степень «Diplôme d'Ingénieur de Chimie ParisTech» в Chimie ParisTech (соответствует степени магистра в области инженерных наук).

WWW: <http://smti.tsu.ru/ru/diplome-dingénieur-de-chimie-paristech/>
Телефон: + 7 (3822) 78 56 21
E-mail: gulnara.voronova@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

РАСЧЕТ ВНУТРИБАЛЛИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОПЕЛ И ПОТЕРЬ НА ТРЕНИЕ К.Л. Алигасанова, Р.Ю. Бургомистренко	7
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ МНОГООБЛОЧНЫХ СТРУЙ С ПРЕГРАДОЙ К.Л. Алигасанова, А.М. Кагенов, К.В. Костюшин	10
ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАБОЧЕЙ СРЕДЫ НА СТРУКТУРУ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ С НЕРАВНОМЕРНЫМ НАГРЕВОМ М.С. Астанина	13
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ЧАСТИЦ НА МЕТАЛЛИЧЕСКУЮ СЕТКУ Л.Р. Ахметшин, А.Г. Кушнарев	17
ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА НА ПРОЦЕСС ОХЛАЖДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ Н.С. Бондарева, Е.В. Шулепова	20
СПЕКТРАЛЬНО УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ТЕМНОГО ФОТОНА ЭЛЕКТРОНОМ И.В. Ворончихин, Б.И. Василишин	23
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ Н.С. Гибанов	26
ЗНАЧИМОСТЬ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЛОПАТОЧНЫХ МАШИН Е.И. Гурина	29
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОНОТОННОЙ СХЕМЫ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ПОТОКОВ Д.О. Диль, М.М. Какышев	33
АНАЛИЗ ДАННЫХ МНОГОЗОНАЛЬНОЙ АЭРОФОТОСЪЕМКИ МЕТОДОМ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ИСТОРИЧЕСКИХ ТЕРРИТОРИЙ А.Г. Злобина	36
ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ГЕНЕРАЦИИ МОМЕНТ-МАТЧИНГ ПОСТРОЕНИЯ СЦЕНАРИЕВ ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ Ю.К. Измestьева	39
НОРМИРОВКА ОТОБРАЖЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ И ХОДОВОЕ УРАВНЕНИЕ ЛЕВНЕРА И.А. Колесников	42
РАСШИРЕНИЕ КОНДЕСАТА В КОЛЬЦЕВОЙ ЛОВУШКЕ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО А.Е. Кулагин	45
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ СТЕПЕННОЙ НАНОЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ Д.С. Лоенко	48
ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЕСТЕСТВЕННУЮ КОНВЕКЦИЮ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ С ТЕПЛОПРОВОДНЫМИ СТЕНКАМИ И ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ С.А. Михайленко	51
ОЦЕНКА ЭМОЦИОНАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЧЕЛОВЕКА МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО ДИСКРИМИНАНТНОГО АНАЛИЗА Нгуен Данг Куанг, Чан Зюй Хынг, Чу Нгок Хай	55

К СОЗДАНИЮ ПРИКЛАДНОЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИАГНОСТИКИ КОГНИТИВНОЙ И ЭМОЦИОНАЛЬНО-ВОЛЕВОЙ СФЕРЫ ПОСТИНСУЛЬТНЫХ ПАЦИЕНТОВ НА РАЗНЫХ ЭТАПАХ ВОССТАНОВИТЕЛЬНОГО ЛЕЧЕНИЯ В.Б. Обуховская, Д.Г. Назметдинова	58
АДАПТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АВТОРЕГРЕССИИ М.А. Повзун	62
РАСЧЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КАПЕЛЬНОГО УНОСА БОРНОЙ КИСЛОТЫ ПРИ РАБОТЕ РЕАКТОРА ВВЭР В АВАРИЙНОМ КИПЯЩЕМ РЕЖИМЕ А.Р. Сахипгареев, А.С. Шлепки	65
ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ В ПРОТОЧНЫХ ТРАКТАХ РДТТ С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГАЗОПРИХОДА М.С. Серeda, А.В. Червакова	68
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ Г.К. Соколова	71
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ЗАЖИГАНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ФРАГМЕНТОВ В ЛАБОРАТОРНЫХ УСЛОВИЯХ В.А. Тараканова, Д.П. Касымов, М.В. Агафонцев	74
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АТОМА ГЕЛИЯ ВНУТРИ МОЛЕКУЛЫ ФУЛЛЕРЕНА C ₆₀ Е.А. Тарасов	77
INFLUENCE OF THE HEATER LOCATION ON HEAT AND MASS TRANSFER IN A LARGE- SCALE ENCLOSURE А.А. Toylibaev, S.I. Sabaev, I.V. Miroshnichenko	80
БИЕКЦИЯ МЕЖДУ ДЕРЕВОМ И/ИЛИ И ГРАФИЧЕСКИМ КОМБИНАТОРНЫМ ОБЪЕКТОМ Г.А. Филиппов, П.П. Щеглов	83
РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ГАЗА В СОПЛОВЫХ БЛОКАХ А.В. Червакова, М.С. Серeda	86
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МИКРОКОНТРОЛЛЕРА ESP8266 В РАЗРАБОТКЕ ОБУЧАЮЩЕЙ ИГРЫ Г.С. Чурсин	89
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ: РАЗРЕШИМОСТЬ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ В.В. Шеметова	92
НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД СЕГМЕНТАЦИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ А.О. Шерстобитова	95
РАЗРАБОТКА ПРАВИЛ БИЕКЦИИ МЕЖДУ МНОЖЕСТВОМ ВАРИАНТОВ ДЕРЕВА И/ИЛИ И МНОЖЕСТВОМ ВАРИАНТОВ ОТВЕТА НА ЗАКРЫТЫЕ ТЕСТЫ П.П. Щеглов, Г.А. Филиппов	99

РАСЧЕТ ВНУТРИБАЛЛИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОПЕЛ И ПОТЕРЬ НА ТРЕНИЕ

К.Л. Алигасанова, Р.Ю. Бургомистренко

Научный руководитель: к.ф.-м.н. И.В. Еремин

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: aligasanova@gmail.com

CALCULATION OF INTERNAL-BALLISTIC CHARACTERISTICS OF NOZZLES AND FRICTION LOSS

K.L. Aligasanova, R.Yu. Burgomistrenko

Scientific Supervisor: PhD I.V. Eremin

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: aligasanova@gmail.com

***Abstract.** In this work, the method of S. K. Godunov has been implemented to define the ballistic characteristics of the nozzle and to solve the integral equations of the boundary layer in order to determine its parameters and friction losses. There was conducted testing and comparison of the calculation results of the developed program with the theoretical data of other authors.*

Введение. Математическое моделирование течений в газодинамических трактах ракетных двигателей проводят с целью определения локальных и интегральных характеристик параметров потока. Их определение является основной задачей на этапе теоретической проработки проектируемых изделий, в том числе с использованием перспективных топлив. Одной из составляющих потерь удельного импульса тяги являются потери на трение, которые связаны с сопротивлением трения при обтекании профиля сопла и как следствие изменением давления вдоль стенки сопла. Данное изменение происходит из-за отеснения линий тока от стенки сопла пограничным слоем. При проведении расчетов это можно учесть за счет исправления контура сопла на толщину потери импульса. Поэтому при расчете удельного импульса тяги его нужно уменьшить на величину сопротивления трения.

Цель настоящей работы заключается в расчете внутрибаллистических характеристик в сопловом блоке и расчете потерь на трение в проектируемых соплах. С точки зрения инженерной методики для определения основных параметров одномерного течения вязкого газа предпочтительным считается выполнение расчета в два этапа с выделением в движущемся потоке двух областей – потенциального ядра и пограничного слоя. Такой подход позволяет существенно упростить расчет, поскольку оказывается возможным в ядре потока пренебречь влиянием сил вязкости и считать течение идеальным. Для определения потерь на трение при этом требуется рассчитать пограничный слой вдоль внутренней поверхности сопла. Параметры на внешней границе пограничного слоя в этом случае приравниваются к параметрам идеального газа в ядре потока.

Методика расчета. В качестве физико-математической модели для описания невязкого ядра потока рассматриваются уравнения Эйлера, описывающие параметры течения идеального газа для законов сохранения массы, импульса и энергии.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial (e + p)u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Для замыкания системы уравнений (1), привлекается уравнение состояния в калорической форме.

$$\varepsilon = \frac{p}{(n-1)\rho} \quad (2)$$

Численная методика расчета ядра потока в сопле реализована с использованием схемы Годунова, которая позволяет получить параметры в центрах расчетных ячеек, для определения которых необходимо знать потоки через грани расчетной ячейки. Метод Годунова реализован с учетом потоков на границах ячеек разностной сетки с использованием точного решения задачи Римана [1]. Для расчета параметров пограничного слоя используется методика расчета с использованием интегральных соотношений [2]. Интегрированием системы осесимметричных уравнений газовой динамики по толщине пограничного слоя получают обыкновенные дифференциальные уравнения (3) стационарного переноса импульса и энергии при отсутствии химических реакций вдоль стенки сопла.

$$\begin{cases} \frac{d \text{Re}^{**}}{ds} + (1 + \bar{H}) \frac{\text{Re}^{**}}{U_0} \frac{dU_0}{ds} + \frac{\text{Re}^{**}}{R} \frac{d\bar{R}}{ds} = \text{Re}_L \frac{c_{f_0}}{2}(\psi); \\ \frac{d \text{Re}_H^{**}}{ds} + \frac{\text{Re}_H^{**}}{\Delta H} \frac{d\Delta H}{ds} + \frac{\text{Re}_H^{**}}{R} \frac{d\bar{R}}{ds} = \text{Re}_L St_0(\psi). \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы уравнений (3) осуществляется методом Эйлера. Искомыми параметрами являются числа Рейнольдса, рассчитанные по толщине потери импульса.

Результаты. На основании методики расчета (1) – (3) реализована программа расчета внутрибаллистических параметров течения в соплах ракетных двигателей и характеристик пограничного слоя. Тестовые расчеты проводились при следующих безразмерных характеристиках сопла: длина сверхзвуковой части сопла – 0,4 м, радиус критического сечения 0,015 м, угол раскрытия – 4°. Граничные условия: температура – 1000 К, давление – 15,78 МПа. Верификация программы проведена путем сравнения с известным решением [3].

На рисунке 1 представлены результаты расчета толщины вытеснения пограничного слоя по разработанной программе в безразмерных величинах, относительно стенки сопла, где 1 – профиль сопла без учета толщины пограничного слоя, а 2 – с учетом. Рисунок 2 демонстрирует результаты расчета распределения чисел Маха в невязком ядре потока для исходного сопла (1) и для сопла с учетом влияния пограничного слоя (2).

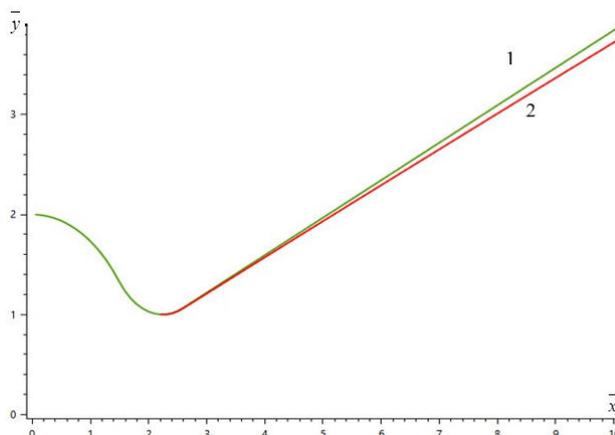


Рис. 1. Профиль сопла

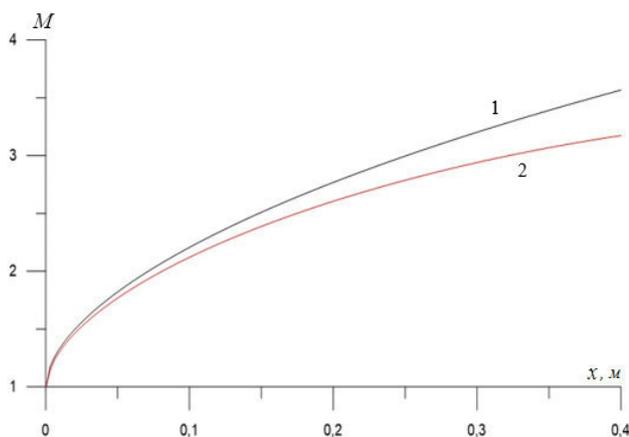


Рис 2. Изменение числа маха от длины сверхзвуковой части сопла

Заключение. В результате работы разработан алгоритм и реализована программа расчета внутрибаллистических характеристик сопел и параметров пограничного слоя. Выполнены тестовые исследования и получены зависимости числа Маха от длины сопла. Результаты расчетов соответствуют известным решениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Забродин А.В. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука» 1976 г.– 395 с.
2. Шишков А.А. Рабочие процессы в ракетных двигателях твердого топлива. – М.: Машиностроение. 1989. – 239 с.
3. Wood N.B. Calculation of the Turbulent Boundary Layer on the Nozzle of an Intermittent Axisymmetric Hypersonic Wind Tunnel. (London: Her Majesty's Stationery Office, 1840), Ministry of aviation, 1964 г.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ МНОГОБЛОЧНЫХ
СТРУЙ С ПРЕГРАДОЙ**

К.Л. Алигасанова, А.М. Кагенов, К.В. Костюшин

Научный руководитель: к. ф.-м. н. И.В. Еремин

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: aligasanova@gmail.com

SIMULATION OF IMPINGEMENT MULTIPLE SUPERSONIC JETS WITH A OBSTACLE

K.L. Aligasanova, A.M. Kagenov, K.V. Kostyshin

Scientific Supervisor: PhD I.V. Eremin

Tomsk State University, Russia, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: aligasanova@gmail.com

Abstract. *This article presents the results of three-dimensional mathematical modeling of impingement with flat obstacle of two and four supersonic jets exhausting from conical nozzles into a highly rarefied medium. The simulation was performed using a modified OpenFOAM-Extended solver, where the method of S. K. Godunov is implemented. From the simulation results it was found that an increase in the number of jets leads to a significant change in the shock-wave structure of multiple jets, force on the bottom region and peripheral flow.*

Введение. Взаимодействие сверхзвуковых струй с плоской поверхностью или с реальной поверхностью стартового стола или планеты является сложной задачей газовой динамики. Это обусловлено процессами сверхзвукового натекания струй на поверхность и образованием системы отраженных ударных волн. Ниже ударной волны возникает область торможения потока, а вдоль поверхности распространяется пристеночная веерная струя. Задача еще больше усложняется в случае натекания многоблочных струй на реальную поверхность в связи с взаимодействием струй между собой. В результате между днищем соплового блока и поверхностью преграды образуется сложная газодинамическая картина трехмерного турбулентного течения сжимаемого вязкого газа с наличием ударных волн, волн разряжения, контактных разрывов, зон смешения и т.д. Целью настоящей работы является исследование газодинамических процессов в результате натекания многоблочных струй на поверхности.

Физико-математическая постановка задачи. В данной работе рассматривалось истечение струй в сильно разряженную среду из 2-х и 4-х конических сопел с числами Маха на срезе сопел $M = 4,5$, расположенных параллельно и равноудаленно друг от друга на расстоянии $l/d_{\text{вых}} = 1,5$. Многоблочные сверхзвуковые струи натекали на преграду, которая располагалась перпендикулярно струям на расстоянии $h = 0,5$ м от среза сопел.

Для математического описания физической постановки задачи использовались осредненные по Фавру уравнения Навье-Стокса. В связи с проведёнными сравнениями моделей турбулентности [1-4] для реализации выбрана модель турбулентности SST $k-\omega$. Задача решалась методом установления, интегрирование по времени производилось методом Рунге-Кутты второго порядка точности, а интегрирование по пространству схемами TVD [5, 6] с ограничителем Venkatakrisnan. Для определения

параметров в центрах дискретных ячеек используется метод С.К. Годунова [7]. Для определения параметров на гранях расчетных ячеек реализован алгоритм точного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва [7]. Для реализации физико-математической модели и проведения параметрических численных исследований применялось свободное программное обеспечение OpenFOAM-Extended, где авторами модифицирован решатель dbnsTurbFoam [8]. Моделирование выполнено с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютера Национального исследовательского Томского государственного университета СКИФ Cyberia.

Результаты. На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования натекания двух и четырех струй на плоскую преграду. На рисунках изображены изоповерхности чисел Маха. Видно, что с увеличением числа струй газодинамическая картина течения существенно перестраивается. Увеличивается донное воздействие отраженных струй от преграды, меняется ударно-волновая структура струй и периферийное течение.

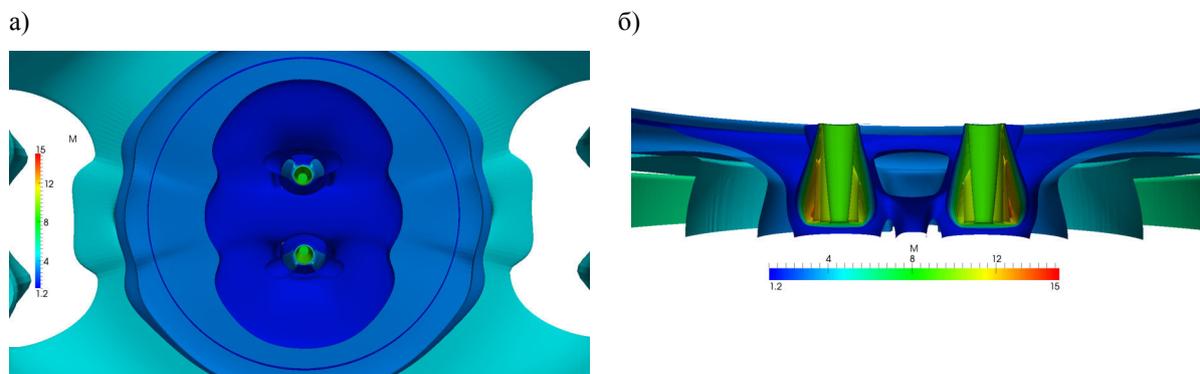


Рис. 1. Изоповерхности чисел Маха для двух струй: а) вид сверху; б) вид в сечении

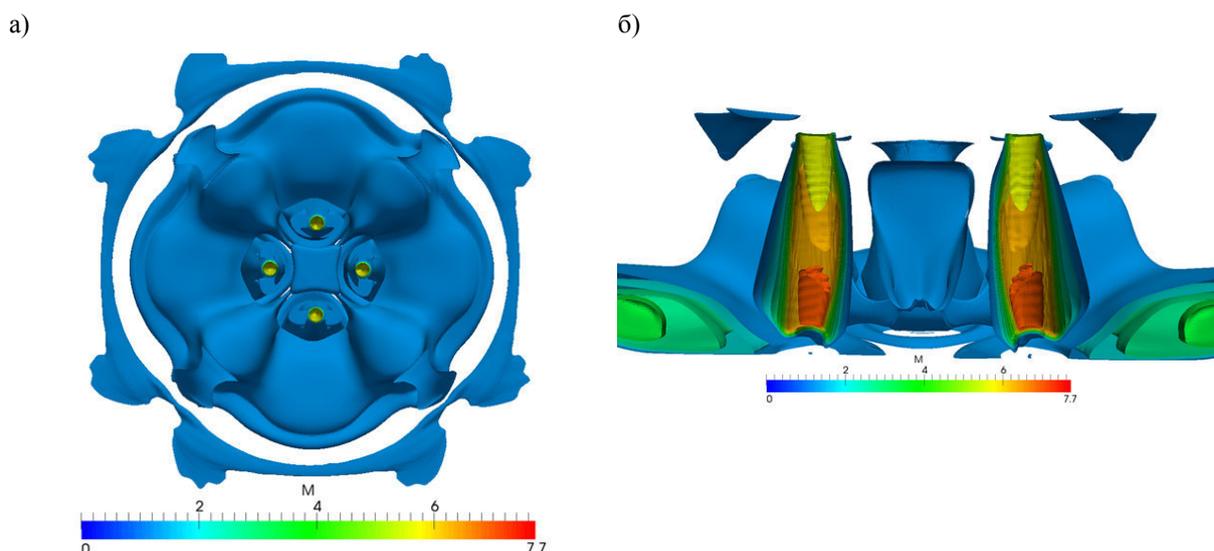


Рис. 2. Изоповерхности чисел Маха для четырех струй: а) вид сверху; б) вид в сечении

Тестирование разработанного алгоритма на струйных течениях с экспериментальными данными других авторов приведено в [8].

Заключение. Проведено трехмерное математическое моделирование натекания на плоскую преграду двух и четырех сверхзвуковых струй, истекающих из конических сопел в сильно разреженную среду. Моделирование выполнено с использованием модифицированного решателя OpenFOAM-Extended, где реализован метод С.К. Годунова. Из результатов моделирования получено, что увеличение числа струй приводит к существенному изменению ударно-волновой структуры многоблочных струй, силовому воздействию на донную область и к периферийному течению.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19-41-703005.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазунов А.А., Кагенов А.М., Еремин И.В. Численное исследование натекания одиночной сверхзвуковой струи на плоскую преграду // *Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018)*. – Алушта., 2018. – 768 с.
2. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Прикладные задачи газодинамики и теплообмена в энергетических установках ракетной техники. – М.: Изд-во МАИ, 2014. – 168 с.
3. Alvi F.S., Ladd J.A., Bower W.W. Experimental and computational investigation of supersonic impinging jets // *AIAA Journal*. – 2002. – V. 40, No4. – P.599–609.
4. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*. – Begell House Inc., West Redding. – 2003. – P. 625–632.
5. Toro E.F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Third Edition – Berlin: SpringerVerlag, Berlin Heidelberg, 2009. – 724 p.
6. Venkatakrishnan V. On the Accuracy of Limiters and Convergence to Steady-State Solutions // *AIAA paper*. – 1993. – N. 93-0880. – P. 1–11.
7. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики – М.: Наука, 1976. – 400 с.
8. Алигасанова К.Л., Костюшин К.В., Кагенов А.М. Разработка и верификация решателя на базе схемы С.К. Годунова в программном комплексе OpenFOAM // *НАУКА. ТЕХНОЛОГИИ. ИННОВАЦИИ: Сборник научных трудов в 9 ч.* – Новосибирск, 2019. – Ч. 2. – С. 90–94.

**ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАБОЧЕЙ СРЕДЫ НА СТРУКТУРУ
КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ С НЕРАВНОМЕРНЫМ НАГРЕВОМ**

М.С. Астанина

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: astanina.marina@bk.ru

**EFFECT OF THE THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF THE WORKING FLUID ON THE
STRUCTURE OF A CONVECTIVE FLOW IN A CUBICAL CAVITY WITH NON-UNIFORM HEATING**

M.S. Astanina

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: astanina.marina@bk.ru

Abstract. *Mathematical simulation of transient natural convection in cubical enclosure with time-dependent temperature profile at vertical wall has been performed. The opposite vertical wall has a constant low temperature T_c , whereas other surfaces are isothermal. The governing differential equations considered in non-dimensional variables are solved by the finite difference technique. The effects of key parameters such as Rayleigh number, Prandtl number and viscosity changeable constant on flow structures have been illustrated.*

Введение. Математическое моделирование процессов теплопереноса в трёхмерных областях является хорошим инструментом для прогноза работы систем охлаждения, так как даёт возможность учесть многие осложняющие факторы окружающей среды. В представленной работе исследуется естественная конвекция жидкости с зависящей от температуры вязкостью в кубической полости, одна из вертикальных границ которой имеет неравномерный нагрев по синусоидальному закону.

Материалы и методы решения. Схематическая постановка рассматриваемой задачи и система координат показаны на рисунке 1. В качестве рабочей жидкости используется ньютоновская

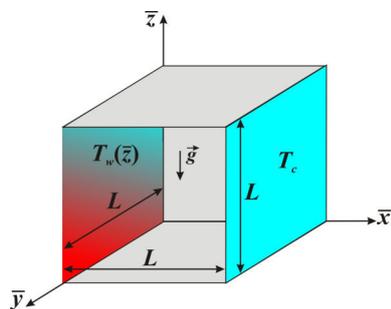


Рис. 1. Постановка задачи

теплопроводная среда с зависимой от температуры вязкостью [1]. Кроме того, среда удовлетворяет приближению Буссинеска. Режим течения ламинарный. Одна из боковых поверхностей куба поддерживается при неравномерной температуре, противоположная граница имеет постоянную температуру охлаждения T_c ; остальные поверхности считаются теплоизолированными. Для описания задачи использовались дифференциальные уравнения в безразмерных преобразованных переменных «векторный потенциал – вектор завихренности – температура» [2] в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} = -\omega_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} = -\omega_y \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} = -\omega_z \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial u}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial u}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = \\ & = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_x)}{\partial z^2} \right) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_y}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial v}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} = \\ & = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_y)}{\partial z^2} \right) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} - \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} - \omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = \\ & = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\mu \omega_z)}{\partial z^2} \right) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\omega_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) + \\ & + 2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

Здесь $Ra = \rho g \beta (T_h - T_c) L^3 / (\alpha \mu_0)$ – число Рэлея, $Pr = \mu_0 / (\rho \alpha)$ – число Прандтля, $\mu = \exp(-\xi \theta)$ – безразмерная вязкость. Кроме того, в этой системе уравнений введены безразмерные переменные, такие как компоненты векторного потенциала и вектора завихренности:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial z}, \quad \bar{v} = \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial x}, \quad \bar{w} = \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial z} = 0. \\ \bar{\omega}_x &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \quad \bar{\omega}_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \quad \bar{\omega}_z = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Безразмерные переменные вводились следующим образом:

$$x = \bar{x}/L, y = \bar{y}/L, z = \bar{z}/L, \tau = t\sqrt{g\beta(T_h - T_c)}/L, \theta = (T - T_c)/(T_h - T_c), \mu = \bar{\mu}/\mu_0,$$

$$u = \bar{u}/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L}, v = \bar{v}/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L}, w = \bar{w}/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L},$$

$$\Psi_x = \bar{\Psi}_x/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L^3}, \Psi_y = \bar{\Psi}_y/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L^3}, \Psi_z = \bar{\Psi}_z/\sqrt{g\beta(T_h - T_c)L^3},$$

$$\omega_x = \bar{\omega}_x\sqrt{L/[g\beta(T_h - T_c)]}, \omega_y = \bar{\omega}_y\sqrt{L/[g\beta(T_h - T_c)]}, \omega_z = \bar{\omega}_z\sqrt{L/[g\beta(T_h - T_c)]}.$$

Начальные и граничные условия для поставленной дифференциальной задачи (1)–(7) рассматривались в следующем виде:

$$\tau = 0: \begin{cases} \Psi_x = 0, \Psi_y = 0, \Psi_z = 0; \omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = 0; \\ \theta = 0 \text{ на } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ и } 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

$$\tau > 0: \begin{cases} \partial\Psi_x/\partial x = 0, \Psi_y = 0, \Psi_z = 0; \omega_x = 0, \omega_y = -\partial w/\partial x, \omega_z = \partial v/\partial x; \\ \theta = \theta_w = \sin(\pi z) \text{ на } x = 0, 0 \leq y \leq 1 \text{ и } 0 \leq z \leq 1. \\ \partial\Psi_x/\partial x = 0, \Psi_y = 0, \Psi_z = 0; \omega_x = 0, \omega_y = -\partial w/\partial x, \omega_z = \partial v/\partial x; \\ \theta = 0 \text{ на } x = 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ и } 0 \leq z \leq 1. \\ \Psi_x = 0, \partial\Psi_y/\partial x = 0, \Psi_z = 0, \omega_x = \partial w/\partial y, \omega_y = 0, \omega_z = -\partial u/\partial y; \\ \partial\theta/\partial y = 0 \text{ на } y = 0, y = 1, 0 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq z \leq 1. \\ \Psi_x = 0, \Psi_y = 0, \partial\Psi_z/\partial z = 0, \omega_x = -\partial v/\partial z, \omega_y = \partial u/\partial z, \omega_z = 0; \\ \partial\theta/\partial z = 0 \text{ на } z = 0, z = 1, 0 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Полученные уравнения в безразмерных переменных «векторный потенциал – вектор завихренности – температура» (1)–(7) с соответствующими начальными и граничными условиями решались с помощью метода конечных разностей на равномерной вычислительной сетке [1, 2]. Предложенная методика решения была проверена ранее на более простых задачах и разных сетках.

Результаты. На рисунке 2 показаны трёхмерное распределение поля температуры установившегося течения в кубической полости при следующих значениях безразмерных параметров: $Ra = 10^{-5}$, $Pr = 7.0$, $\xi = -1$. В полости образуется ламинарное течение. По распределению линий и цветовой гамме можно чётко отследить структуру течения в изучаемой области. Нагрев инициируется около боковой нагреваемой поверхности $x = 0$. Образуется восходящий конвективный поток около тёплой границы и нисходящий около охлаждаемой поверхности $x = 1$. В центре формируется устойчивое конвективное течение с умеренной циркуляцией. Максимальный перепад температуры наблюдается между боковыми гранями полости.

Заключение. В работе проводилось математическое моделирование трёхмерной ламинарной конвекции капельной жидкости ($Pr = 7.0$) с переменной вязкостью в замкнутом кубе с неравномерным подогревом одной из поверхности. Был показан механизм образования такого течения и его структура. Кроме того, было проанализировано влияние изменения вязкости рабочей жидкости на теплоперенос в полости. Выводы основывались на распределениях полей скорости, температуры и на зависимостях среднего числа Нуссельта вдоль нагреваемой стенки.

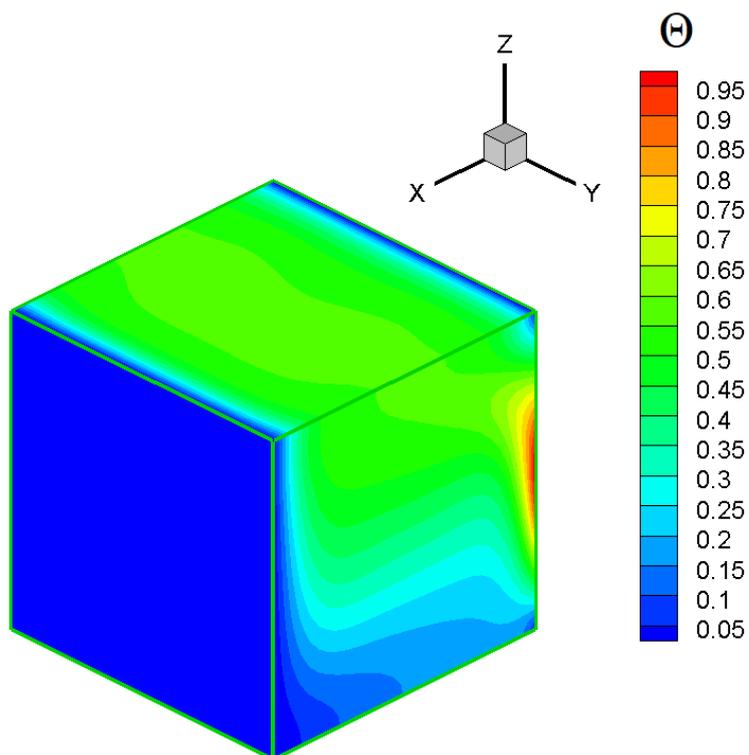


Рис. 2. Распределение поля температуры в кубе

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-79-20141).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Astanina M.S., Sheremet M.A., Umavathi C.J. Unsteady natural convection in a partially porous cavity having a heat-generating source using local thermal non-equilibrium model // International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. – 2019. – Vol. 29, №6. –P. 1902–1919.
2. Gibanov N.S., Sheremet M.A. Natural convection in a cubical cavity with different heat source configurations // Thermal Science and Engineering Progress. – 2018. – Vol. 7. – P. 138–145.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ЧАСТИЦ
НА МЕТАЛЛИЧЕСКУЮ СЕТКУ**

Л.Р. Ахметшин¹, А.Г. Кушнарев¹

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. И.Ю. Смолин²

¹Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, Томск, пр. Ленина, 36, 634050

²Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,

Россия, Томск, Академический пр., 2/4, 634055

E-mail: this_is_patrik@mail.ru

NUMERICAL SIMULATION OF THE INFLUENCE THE HIGH-SPEED PARTICLES ON THE METAL GRID

L.R. Akhmetshin¹, A.G. Kushnarev¹

Scientific Supervisor: Prof., Dr. I.Yu. Smolin²

¹Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

²Institute of Strength Physics and Materials, Russia, Tomsk, 2/4 Academic ave., 634055

E-mail: this_is_patrik@mail.ru

***Abstract.** The process of high-velocity interaction of metal grid with spherical projectile was considered in the three-dimensional formulation. We considered the various configuration of grids. In the process, numerical simulation change velocity projectile after interaction with the grid was calculated.*

Введение. Создание космических аппаратов неотъемлемо связано с обеспечением защиты внутренних систем и конструкции в целом. Повышение эффективности противометеорной защиты связано с оптимизацией ее массы, поскольку утяжеление конструкции космического аппарата, как правило, недопустимо из-за массовых ограничений, закладываемых при его проектировании [1]. Защитные элементы конструкции можно сформировать наложением одного слоя сетки на другой с сохранением направления частей сетки, а также их переплетением. Первый защитный экран (основанный на применении двойной стенки, так называемый щит Уиппла), был предложен ещё до начала космических полётов, в 1947 году [2]. Данная перспектива показана на примере изготовления элементов конструкции космического аппарата, которые использовались при отработке противометеоритной защиты космических аппаратов, а также для защиты от космического мусора [3].

Материал для исследования. В работе для определения поведения ударника при высокоскоростном взаимодействии с металлической сеткой использовались следующие материалы: ударник – алюминий, сетка – сталь. Механические константы материалов представлены в таблице 1. Для исследования поведение ударника после взаимодействия с сеточной преградой были выбраны различные конфигурации сетки (рис. 1): (а) свободное наложение взаимно перпендикулярных проволок, без плетения; (б) наложение взаимно перпендикулярных, синусоидально изогнутых проволок, с совпадением максимумов и минимумов. Сравнивая представленные конфигурации сетки, мы можем увидеть влияние удельной плотности (а и б).

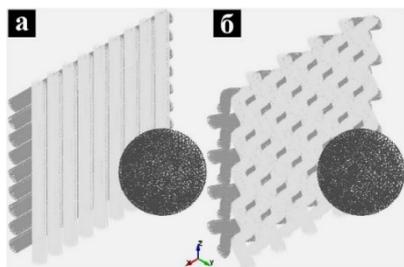


Рис. 1. Конфигурация сеток в изометрии

Таблица 1

Механические константы материала

	A (10^8Па)	B (10^8Па)	C	n	m	T_m (K)
Ударник	1,67	5,96	0,001	0,55	0,86	920°
Сетка	7,92	5,1	0,014	0,26	1	1811°
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	T_m
Ударник	0,18	0,39	-2,24	0	0	920°
Сетка	-0,8	2,1	-0,5	0,002	0,61	1811°

Математическая постановка, начальные и граничные условия. В данной работе процессы столкновения защитных элементов конструкции (сетки) с ударником исследуются численно в трехмерной постановке в рамках упругопластической модели среды. Моделирование процесса осуществлялось с использованием метода сглаженных частиц (SPH). Бессеточная основа SPH делает этот метод идеально подходящим, так как в материале развиваются большие деформации и разрушения.

Система уравнений состоит из уравнений неразрывности, движения, энергии. Для описания механического поведения исследуемого материала выбрана модель Джонсона-Кука, которая учитывает влияние температуры и скорости деформации на напряжение течения и предельную степень деформации материала:

$$\sigma = [A + B \varepsilon_p^n] \left[1 + C \log \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \right] \left[1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right],$$

где ε_p - эффективная пластическая деформация, T_m - температура плавления, T_r - комнатная температура, $A, B, C, n, m, \varepsilon$ - параметры материала.

В ходе эксперимента подразумевается разрушение материала, поэтому для более точного численного описания подбиралась модель разрушения. Для описания этого процесса использовали модель разрушения Джонсона-Кука:

$$D = \frac{1}{\varepsilon_f} \sum_i \Delta \varepsilon_p^i,$$

где ε_f - величина предельной деформации в материале, $\Delta \varepsilon_p^i$ - приращение эффективной пластической деформации в элементе на i -м шаге интегрирования по времени.

Величина $\Delta \varepsilon_p^i$ вычисляется по формуле:

$$\Delta \varepsilon_p^i = \left(D_1 + D_2 \exp \left(D_3 \frac{p}{\sigma_{ef}} \right) \right) \left(1 + D_4 \ln \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} \right) \left(1 + D_5 \frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right),$$

где D_1, \dots, D_5 - параметры материала, σ_{ef} - эффективное напряжение; p - давление в рассматриваемом элементе. Согласно выбранному критерию, разрушение конечного элемента происходит, если параметр поврежденности $D = 1$,

В начальный момент времени ударник и защитная сетка не взаимодействуют, а следовательно:

$$\sigma(x, y, t_0) = \varepsilon(x, y, t_0) = E(x, y, t_0) = D(x, y, t_0) = 0; \rho(0, x) = \rho_0,$$

где $\sigma, \varepsilon, E, D, \rho$ - напряжение, деформация, энергия, параметр поврежденности и плотность в образце, соответственно.

Для процесса высокоскоростного взаимодействия были выбраны следующие граничные условия:

$U_{tor,x}^{gr} = U_{tor,y}^{gr} = U_{tor,z}^{gr} = 0$ мм – торцевые поверхности проволоки (любой из конфигураций) имели жесткую заделку по трем ортогональным осям; $V_x^{proj} = V_z^{proj} = 0, V_x^{proj} = 2$ км/с – вектор скорости ударника был направлен перпендикулярно по направлению к защитной сетке.

Результаты и обсуждения. Сравнивая, представленные конфигурации сетки, мы можем увидеть влияние удельной плотности (свободное наложение и наложение по синусоиде). Рассмотрим случай, когда ударник взаимодействует с сеткой, состоящей из свободно наложенных взаимно перпендикулярных проволок. Ударник пробивает сетку насквозь. Изменение скорости ударника, состоящего из SPH частиц представлено на рисунке 2. Усредняя значения скоростей до единого ударника, видно, что скорость уменьшается на 0,34 км/с. В начале взаимодействия, за счет отсутствия связи между проволоками сетки, не происходит перераспределения напряжений по всей защитной сетке, напряжения в первую очередь распределяются по первому (переднему) слою сетки.

В случае наложения синусоидально изогнутых проволок ударник также проходит насквозь и фрагменты ударника проходят сетку при этом их скорость снижается до 1,64 км/с (уменьшается на 0,36 км/с) (рис. 2). За счет подобной конфигурации защитной сетки передача напряжения происходит от одной части к другой равномерно, тем самым обеспечивая перераспределение.

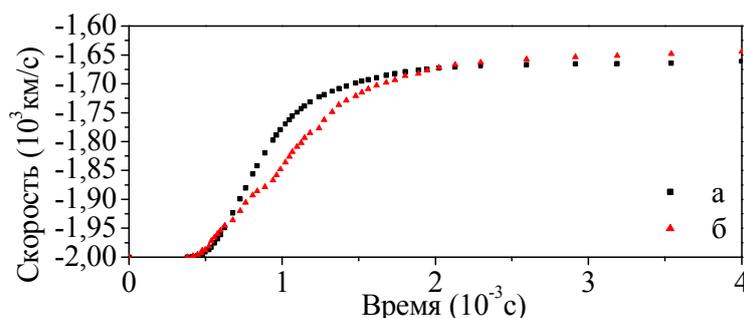


Рис. 2. Изменение скорости SPH частиц при высокоскоростном взаимодействии с сеткой, состоящей из (а) свободно наложенных взаимно перпендикулярных проволок, (б) наложение проволок по синусоиде

Заключение. В результате численного моделирования были получены результаты по скорости движения SPH частиц ударника. Сравнивая, представленные конфигурации сетки, видно, что скорость ударника после взаимодействия меньше в случае с наложением проволок по синусоиде. Это говорит о том, что удельная плотность сетки влияет на ударник вовремя взаимодействия.

Данное научное исследование выполнено при частичной поддержке Российского научного Фонда (грант № 16-19-10264).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добрица Д.Б., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Исследование эффективности сеточных гофрированных экранов для защиты космических аппаратов от воздействия метеорно-техногенных частиц // Космические исследования. – 2020. – Т. 58, № 2. – С. 131–137.
2. Whipple F.L. Meteorites and Space Travel. Astronomical Journal. – 1947. – No. 1161. – P. 131.
3. Герасимов А.В., Добрица Д.Б., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Теоретико-экспериментальное исследование способа защиты космических аппаратов от высокоскоростных частиц // Космические исследования. – 2016. – Т. 54., № 2. – С. 126–134.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА НА ПРОЦЕСС ОХЛАЖДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Н.С. Бондарева, Е.В. Шулепова

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: bondarevans@mail.tsu.ru

INFLUENCE OF THE PHASE CHANGE TEMPERATURE ON HEAT TRANSFER IN PCM BASED HEAT SINK

N.S. Bondareva, E.V. Shulepova

Scientific Supervisor: Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: bondarevans@mail.tsu.ru

Abstract. Modern computing technologies are based on a micro-scale architecture. The dense arrangement and high power create high heat flux densities and, as a consequence, rapid heating of the elements. With variable thermal loads or peak capacities, the most efficient cooling method is to use PCM. This study is devoted to the analysis of the effects of PCM properties inside a closed heat sink on the cooling of a volumetric heat source. A numerical analysis of the melting within the chamber and heat removal from the local heater under the external air cooling is carried out.

Введение. Применение парафинов для хранения и транспортировки энергии широко распространено в энергетических отраслях. В сфере электронной техники материалы с изменяемым фазовым состоянием применяются для охлаждения приборов [1, 2]. Основной целью добавления наночастиц в материал является интенсификация теплопереноса за счет повышения теплопроводности. Уменьшение размеров частиц без снижения объемной доли приводит к увеличению площади соприкосновения частиц с материалом, а значит к усилению теплопроводности [3–6].

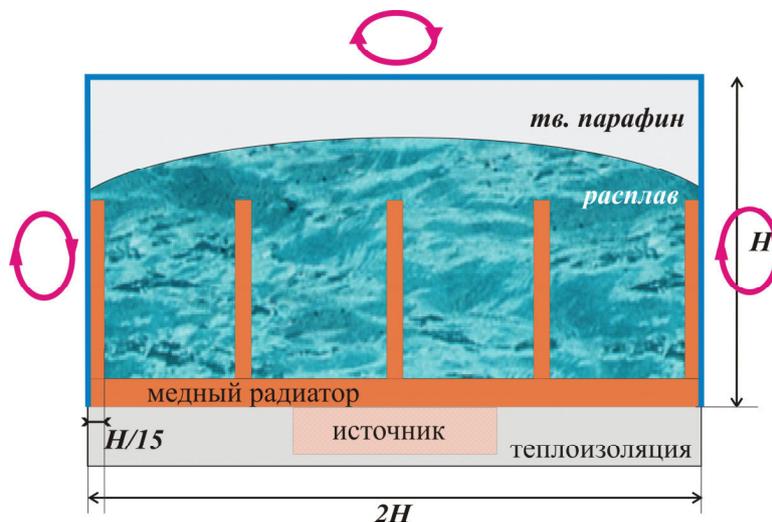


Рис 1. Рассматриваемая область решения

Работа посвящена численному анализу процессов тепломассопереноса в системе с металлическим профилем, содержащей парафин, усиленный наночастицами Al_2O_3 , и источник постоянной мощности (рис. 1). В начальный момент времени температура системы совпадала с температурой окружающей среды, которая ниже температуры плавления материала. Рассматривалось влияние температуры фазового перехода на процесс плавления материала с разными концентрациями наночастиц оксида алюминия. Расплав считался теплопроводной ньютоновской жидкостью, а течение – ламинарным. Уравнения гидродинамики и теплопереноса в переменных «скорость – давление – температура» имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nm}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{nm}}{\rho_{nm}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nm}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{nm}}{\rho_{nm}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\rho\beta)_{nm} g (T - T_m),$$

В расплаве уравнение конвективного теплопереноса – $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = \lambda_{nm} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$, в

твердом парафине уравнение теплопроводности – $\frac{\partial h}{\partial t} = (\lambda_s)_{nm} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$.

Внутри профиля и источника энергии решались уравнения теплопроводности с учетом термических свойств материалов этих элементов.

Теплофизические свойства наноматериала определялись из следующих соотношений [4]:

$$(\rho\beta)_{nm} = (1-\Phi)(\rho\beta)_m + \Phi(\rho\beta)_{np}, \quad (\rho c)_{nm} = (1-\Phi)(\rho c)_m + \Phi(\rho c)_{np}, \quad \rho_{nm} = (1-\Phi)\rho_m + \Phi\rho_{np},$$

$$c_{nm} = \frac{(\rho c)_{nm}}{\rho_{nm}}, \quad L_{nm} = \frac{(1-\Phi)\rho_l L_l}{\rho_{nm}}, \quad \mu_{nm} = 0,983e^{12,959\Phi} \mu_m.$$

Теплопроводность определялась из соотношения [5]:

$$\lambda_{nm} = \frac{\lambda_{np} + 2\lambda_m - 2(\lambda_m - \lambda_{np})\Phi}{\lambda_{np} + 2\lambda_m + (\lambda_m - \lambda_{np})\Phi} \lambda_m + 5 \cdot 10^4 \beta_\lambda \Phi \rho_m c_m \sqrt{\frac{\kappa T_l}{\rho_{np} d_{np}}} f(T_l, \Phi),$$

где $\beta_\lambda = 8,4407(100\Phi)^{-1,07304}$, $\kappa = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ – постоянная Больцмана,

$$f(T, \Phi) = \left(2,817 \cdot 10^{-2} \Phi + 3,917 \cdot 10^{-3} \right) \frac{T_l}{T_0} + \left(-3,0669 \cdot 10^{-2} \Phi - 3,91123 \cdot 10^{-3} \right) - \text{ для расплава, } T_0 = 273^\circ K,$$

$T_l = 320^\circ K$, для твердого парафина $f(T, \Phi) = 0$.

В математической постановке приняты следующие обозначения: x, y – декартовы координаты; t – время; g – ускорение свободного падения; μ – динамический коэффициент вязкости; β – коэффициент температурного расширения расплава; ρ – плотность; u, v – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости; p – давление; T – температура; T_m – температура плавления; h – энтальпия, λ – коэффициент теплопроводности, c – теплоемкость, Φ – объемная доля наночастиц; а также индексы: s – твердый парафин, l – расплав, m – парафин, np – наночастицы, nm – парафин с наночастицами.

На всех границах, включая границу фазового перехода, $\bar{v} = 0$, температура окружающей среды была постоянна $T = T_c$, на остальных границах ставилось условие теплоизоляции $\partial T / \partial \bar{n} = 0$.

Дифференциальные уравнения в частных производных были решены с использованием метода конечных разностей на равномерной прямоугольной сетке 480×200 [7, 8]. Разностное уравнение Пуассона для функции тока было решено методом последовательной верхней релаксации. Уравнение энергии и уравнение дисперсии завихренности решались с использованием локально-одномерной схемы А.А. Самарского.

В результате вычислений были получены распределения таких параметров, как скорость и температура на различных этапах процесса плавления. Рассмотрены случаи с различной температурой плавления материала и разными значениями объемной доли наночастиц. Основное внимание уделялось влиянию варьируемых параметров на установление конвективного режима в расплаве и его взаимодействие с межфазной границей.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента для молодых ученых МК-1934.2019.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baby R., Balaji C. Experimental investigations on thermal performance enhancement and effect of orientation on porous matrix filled PCM based heat sink // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. – 2013. – Vol. 46. – P. 27–30.
2. Ali H.M., Arshad A., Jabbar M., Verdin P.G. Thermal management of electronics devices with PCMs filled pin-fin heat sinks: A comparison // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2018. – Vol. 117. – P. 1199–1204.
3. Wen D., Lin G., Vafaei S., Zhang K. Review of nanofluids for heat transfer applications // *Particuology*. – 2009. – Vol. 7. – P. 141–150.
4. Dhaidan N.S., Khodadadi J.M., Al-Hattab T.A., Al-Mashat S.M. Experimental and numerical investigation of melting of phase change material/nanoparticle suspensions in a square container subjected to a constant heat flux // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2013. – Vol. 66. – P. 672–683.
5. Vajjha R.S., and Das D.K., Experimental determination of thermal conductivity of three nanofluids and development of new correlations // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2009. – Vol. 52. – P. 4675–4682.
6. Valan Arasu A., Sasmito A.P., Mujumdar A.S. Numerical performance study of paraffin wax dispersed with alumina in a concentric pipe latent heat storage system // *Thermal Science*. – 2013. – Vol. 17, № 2. – P. 419–430.
7. Бондарева Н.С., Шеремет М.А. Математическое моделирование режимов плавления в квадратной полости с локальным источником энергии // *Теплофизика и аэромеханика*. – 2016. – Т. 23, № 4. – С. 577–590.
8. Bondareva N.S., Sheremet M.A. Flow and heat transfer evolution of PCM due to natural convection melting in a square cavity with a local heater // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2017. – Vol. 134. – P. 610–619.

**СПЕКТРАЛЬНО УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ТЕМНОГО
ФОТОНА ЭЛЕКТРОНОМ**

И.В. Ворончихин, Б.И. Василишин

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: IVV1211@yandex.ru

SPECTRAL ANGULAR POWER DISTRIBUTION ELECTRON DARK PHOTON RADIATION

I.V. Voronchikhin, B.I. Vasilishin

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: IVV1211@yandex.ru

Abstract. *This article investigates the spectral-angular distribution of spontaneous radiation of dark and electromagnetic photons by an electron moving in electromagnetic fields of an arbitrary form. The motion of the electron is described on the basis of the Dirac equation whose solutions are sought in the semiclassical approximation.*

Введение. Темный фотон это массивная векторная частица со спином 1, которая, по теоретическим предположениям, обладает схожими квантовыми числами с электромагнитным фотоном, с массой в пределах $0,002-0,4 \text{ ГэВ}$ и константой смешивания с электромагнитным фотоном $t < 1,2 \cdot 10^{-4}$. Взаимодействие со стандартной моделью осуществляется через смешивание с электромагнитным фотоном. Общий лагранжиан имеет вид [1, 2]:

$$L = L_{\psi,A} + L_{\chi,A'} + L_{A,A'}$$

где $L_{\psi,A}$ и $L_{A,A'}$ – лагранжиан взаимодействия частицы стандартной модели и электромагнитного фотона и лагранжиан взаимодействия темного и электромагнитного фотонов:

$$L_{\psi,A} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \bar{\psi} \left\{ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - eA^{\mu}) - M_{\psi} \right\} \psi, \quad L_{A,A'} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F'^{\mu\nu},$$

где $L_{\chi,A'}$ – взаимодействие темного фотона и темного фермиона:

$$L_{\chi,A'} = -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda_{M_{A'}}^2 A'_{\mu} A'^{\mu} + \bar{\chi} \left\{ \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - g'A'^{\mu}) - M_{\chi} \right\} \chi,$$

где $F^{\mu\nu}$ – тензор напряженности электромагнитного поля; A^{μ}, A'^{μ} – 4-вектор потенциала электромагнитного и темного фотонов; $F'^{\mu\nu} = \partial^{\nu} A'^{\mu} - \partial^{\mu} A'^{\nu}$ – тензор поля темного фотона; $\lambda_{M_{A'}} = M_{A'} c / \hbar$ – длина Комптона темного фотона; $M_{A'}, M_{\chi}, M_{\psi}$ – масса темного фотона, темного фермиона и фермиона стандартной модели соответственно.

Квантование поля темного и электромагнитного фотонов. Используя уравнения Эйлера-Лагранжа для $L_{\psi,A}$ и $L_{A,A'}$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_\mu F'^{\mu\nu} + \lambda_{M_s}^2 A'^\nu = \tau \partial_\mu F^{\mu\nu} \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = \tau \partial_\mu F'^{\mu\nu} \end{cases}$$

Из данной системы следует то, что потенциал A^ν имеет вид $\tilde{A}^\nu + \varepsilon A'^\nu$, где \tilde{A}^ν – потенциал электромагнитного фотона без учета эффекта смешивания; A'^ν – потенциал темного фотона данной, который можно представить в виде разложения на плоские волны $A'^\nu = \sum_{\mu, \lambda} e_\lambda^\nu \left(c_{\mu\lambda}^- e^{-ix_\beta \mu^\beta} + c_{\mu\lambda}^+ e^{ix_\beta \mu^\beta} \right)$, где $e^\nu = (e, \bar{e})$ – 4-вектор поляризации; e, \bar{e} – скалярная и векторная поляризации, соответственно; $x^\beta = (ct, \vec{x})$ – 4-вектор координаты; $\mu^\beta = (\omega_\mu, \vec{\mu})$ – волновой 4-вектор темного фотона. Вторично проквантовав выражение для потенциала темного фотона A'^ν и, используя представление Фарри, добавив вторично квантованное поле электромагнитного фотона A^ν получим выражение с заданными коммутационными соотношениями $[\hat{c}_{k\lambda}, \hat{c}_{k'\lambda'}^+] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, [\hat{c}_{k\lambda}, \hat{c}_{k'\lambda'}] = 0, [\hat{c}_{k\lambda}^+, \hat{c}_{k'\lambda'}^+] = 0$:

$$\hat{A}^\nu + \varepsilon \hat{A}'^\nu = \frac{1}{\sqrt{2V}} \int \sum_\lambda e_{(\lambda)}^\nu \left(\hat{c}_{k\lambda}^- e^{-ix_\beta k^\beta} + \hat{c}_{\mu\lambda}^+ e^{ix_\beta k^\beta} \right) \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{2V}} \int \sum_{\lambda} e_{(\lambda)}^\nu \left(\hat{c}'_{\mu\lambda}^- e^{-ix_\beta \mu^\beta} + \hat{c}'_{\mu\lambda}^+ e^{ix_\beta \mu^\beta} \right) \frac{d^4 \mu}{(2\pi\hbar)^4}$$

где $k^\beta = (\omega, \vec{k})$ – волновой 4-вектор электромагнитного фотона; λ_{M_s} – длина Комптона темного фотона. Матрица рассеяния S в первом порядке приближения с матричными элементами $\langle \beta | \hat{S}^{(1)} | \alpha \rangle$ в случае излучения темного и электромагнитного фотона с учетом смешивания [3]:

$$\hat{S}^{(1)} = i \int j_\mu \hat{A}'^\mu d^4 x, \quad \langle \beta | \hat{S}^{(1)} | \alpha \rangle = \frac{e_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} M_{\nu\nu'}(t) dt,$$

$$M_{\nu\nu'}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{\nu'}^+(\vec{x}, t) \left\{ \left(\vec{\alpha}, \vec{e}_{(\lambda)} \right) e^{-i(\vec{x}, \vec{k})} + \varepsilon \left(\vec{\alpha}, \vec{e}'_{(\lambda)} \right) e^{-i(\vec{x}, \vec{\mu})} \right\} \psi_\nu(\vec{x}, t) d^3 x,$$

где j_μ – ток перехода; $M_{\nu\nu'}(t)$ – амплитуда излучения; ν, ν' – мультииндексы начального и конечного состояния, характеризующие номер состояния n и спин частицы σ . Движение электрона описывается уравнением Дирака:

$$\left\{ -i\hbar \partial_t + \vec{\mathbb{H}}_D \right\} \psi = 0, \quad \vec{\mathbb{H}}_D = \left\langle \vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbb{P}} \right\rangle + \alpha_0 m_0 c^2 + e_0 \Phi(\vec{x}, t) I_4, \quad \vec{\mathbb{P}} = \vec{\mathbb{p}} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}, t),$$

где $(\alpha_0, \vec{\alpha})$ – $\vec{\alpha}$ -матрицы Дирака; $\vec{\mathbb{P}}$ – оператор обобщенного импульса; $\vec{A}(\vec{x}, t)$, $\Phi(\vec{x}, t)$ – векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля соответственно; m_0 – масса фермиона. Волновые функции электрона в электромагнитном поле будем искать в квазиклассическом приближении с точностью до порядка малости по $\hbar^{3/2}$ [4, 5]:

$$\psi(\vec{x}, t, \hbar) = \left\{ \Pi_+(t) + \Pi_-(t) \left(\hbar^{1/2} \hat{Q}_1 + \hbar \hat{Q}_2 \right) \right\} U^0,$$

где $U^0(\vec{x}, t) = \varphi^{(0)}(\vec{x}, t) U(t)$ и справедливы уравнения:

$$\left\{ -i\hbar \frac{d}{dt} + \left\langle \vec{\sigma}, \vec{D}_0 \right\rangle \right\} U(t) = 0, \quad \left\{ -i\hbar \partial_t + \hat{\lambda} \right\} \varphi^{(0)} = 0, \quad \vec{D}_0 = \frac{\mu_0}{\gamma} \left\{ \frac{[\beta \times E(t)]}{1 + \gamma^{-1}} - \vec{H}(t) \right\}.$$

где $\varepsilon(t) = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 \vec{P}^2(t)}$ – полная энергия электрона и обозначен оператор

$\hat{\lambda} = \lambda^+(t) + \langle \lambda_z, \Delta \hat{z} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{z}, \lambda_{zz} \Delta \hat{z} \rangle$, построенный на собственных значениях $\lambda^\pm = e_0 \Phi(\vec{x}, t) \pm \varepsilon$ главного

символа гамильтониана $H(\vec{x}, t)$ где $Z(t) = (P(t), X(t))$ – траектория на фазовом пространстве и введены смещения импульса и координаты $\Delta \vec{p}, \Delta \vec{x}$ на фазовую траекторию $Z(t)$, аналогично для операторов $\Delta \hat{p}, \Delta \hat{x}, \Delta \hat{z}$:

$$\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{X}(t), \quad \Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{P}(t), \quad \Delta z = z - Z(t), \quad z_j = x_j, \quad z_{j+n} = p_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Собственные вектора главного символа гамильтониана $H(\vec{x}, t)$:

$$\Pi_+(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(m_0 c^2 + \varepsilon)}} \begin{pmatrix} m_0 c^2 + \varepsilon \\ c \langle \vec{\sigma} \vec{P} \rangle \end{pmatrix}, \quad \Pi_-(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(m_0 c^2 + \varepsilon)}} \begin{pmatrix} c \langle \vec{\sigma} \vec{P} \rangle \\ -m_0 c^2 - \varepsilon \end{pmatrix},$$

и используются обозначения:

$$\hbar^{1/2} \hat{Q}_1 = \frac{c}{2\varepsilon} \left(\frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\beta}, \Delta \vec{P}_1 \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \Delta \vec{P}_1 \rangle \right), \quad \Delta \vec{P}_1(t) = \Delta \vec{p}(t) - \frac{e_0}{c} d_T^1 \vec{A}(X(t), t),$$

$$\hbar \hat{Q}_2 = -\frac{e}{2\varepsilon} \left(\frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\sigma}, d_T^2 \vec{A} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, d_T^2 \vec{A} \rangle \right) + \frac{i\hbar\gamma}{2} \frac{1}{2\varepsilon} \left(\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{\beta}} \rangle \right) - \frac{c}{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \langle \vec{\sigma}, \Delta \vec{p} \rangle \hbar^{1/2} Q_1.$$

где для обозначения элемента разложения по переменной \vec{x} в ряд Тейлора для многих переменных по степени малости переменной $\Delta \vec{x}$ используем $d_T^n f(\vec{x} + \Delta \vec{x}, t)$ порядка n .

Результаты. Конечная формула для получения полной мощности излучения имеет вид:

$$W = \frac{e_0^2}{2\pi} \int \frac{d^4 \Omega}{(2\pi\hbar)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} M_{\nu\nu'}(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega' t'} M_{\nu\nu'}^*(t') dt'$$

Заключение. В результате получена конечная формула для расчета мощности спонтанного излучения темного и электромагнитного фотонов в электромагнитных полях произвольного вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gninenko S.N., Search for MeV dark photons in a light-shining-through-walls experiment at CERN — Phys. Rev. D 89, 075008 –Published 8 April 2014.
2. D. Banerjee et al. (The NA64 Collaboration), Search for vector mediator of dark matter production in invisible decay mode — Phys. Rev. D 97, 072002 – Published 4 April 2018.
3. Соколов А. А. Тернов И.М. Квантовая электродинамика. // М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1983. – 312с.
4. Bagrov V.V. Belov V.V. Trifonov A.Yu. Theory of spontaneous radiation by electrons in a trajectory coherent approximation // J.Phys A: Math. Gen. – 1993. – Vol 26, No 22. – P. 6431-6449.
5. Багров В. Г., Белов В. В., Трифонов А. Ю. Методы математической физики. Асимптотические методы в релятивистской квантовой механике: учебное пособие. //Томск: Изд во ТПУ. – 2006 г. 218

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВЕННОЙ
КОНВЕКЦИИ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ
АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ**Н.С. Гибанов

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: Gibanov@mail.tsu.ru**MATHEMATICAL MODELING OF THREE DIMENSIONAL PROBLEMS OF NATURAL
CONVECTION BY LATTICE BOLTZMANN METHOD. COMPARATIVE ANALYSIS
OF DIFFERENT NUMERICAL METHODS TO THE SOLUTION OF SPATIAL TASKS**N.S. Gibanov

Scientific Supervisor: Associate Professor, Dr. M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin Avenue, 36, 634050

E-mail: Gibanov@mail.tsu.ru

***Abstract.** Numerical investigation of spatial natural convection in a closed cubical cavity by lattice Boltzmann method and finite difference method has been performed. The research area represents a cubical cavity with left heating wall, and right cooling, It was assumed that the remaining walls were adiabatical. As the result of calculation the local and integral characteristic of heat and mass transfer have been obtained. A comparison between results getting by lattice Boltzmann method and by finite difference method had been carried out, and comparison between two-dimensional and three-dimensional result had been performed.*

Введение. В связи с развитием области вычислительных технологий, развиваются и совершенствуются и методики проведения тех или иных численных расчетов. В начале набрал популярность метод конечных разностей (МКР), затем развились и стали активно применяться методы контрольных объемов и конечных элементов [1]. В последние 2-3 десятилетия становится все более актуальным метод решеточных уравнений Больцмана (РМБ). Область его применения схожа со всеми вышеперечисленными сеточными методами. Однако можно также и выделить некоторые особенности, которые позволяют превзойти старые методики в отдельных классах задач. В частности, решеточный метод Больцмана более прост в реализации задач гидродинамики в пористых средах и многофазных течениях, а также при моделировании процессов теплопередачи с использованием материалов с изменяемым фазовым состоянием [2]. Также необходимо отметить простоту реализации распараллеливания вычислительных процессов [3].

В данной работе подробно был детально исследован алгоритм решения пространственных задач с применением решеточного метода Больцмана. Кроме того, была решена двумерная задача и проведено сравнение полученных результатов.

Физическая и математическая постановка. Область исследования представлена на рисунке 1. Рассматривается течение несжимаемой ньютоновской жидкости удовлетворяющей приближению

Буссинеска с постоянными теплофизическими свойствами в замкнутой квадратной (Рисунок 1, а) и кубической областях (рисунок 1, б). Боковые стенки поддерживались при фиксированных температурах T_h и T_c . Остальные стенки считались теплоизолированными. Процессы теплообмена в исследуемых областях описываются с помощью безразмерных уравнений в преобразованных переменных Обербека-Буссинеска (для МКР) и с помощью уравнений Больцмана (для РМБ).

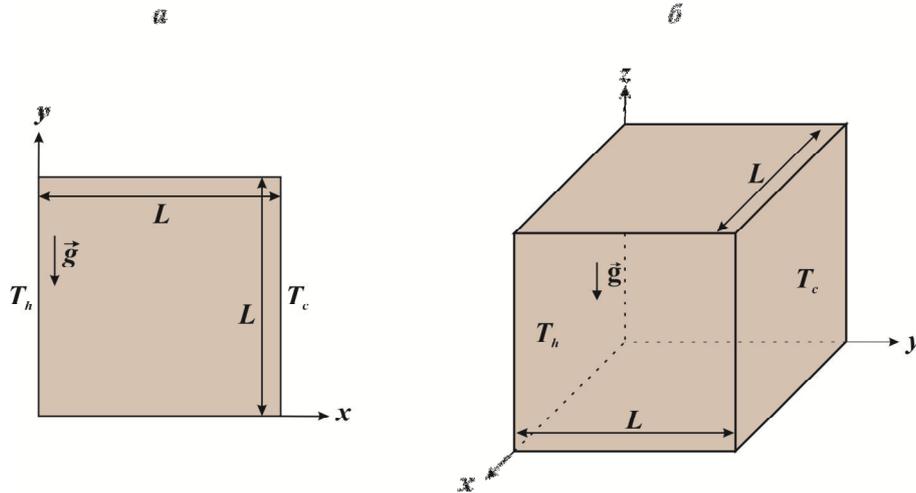


Рис. 1. Область исследования

Пространственные уравнения Обербека-Буссинеска в преобразованных переменных «векторный потенциал – вектор завихренности» представлены следующим образом:

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_x}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_x}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial U}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial U}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial U}{\partial Z} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \Omega_x + \frac{\partial \Theta}{\partial Y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_y}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_y}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial V}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial V}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial V}{\partial Z} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \Omega_y - \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_z}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_z}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial W}{\partial X} - \Omega_y \frac{\partial W}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial W}{\partial Z} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \nabla^2 \Omega_z, \quad (3)$$

$$\nabla^2 \Psi_x = -\Omega_x, \quad \nabla^2 \Psi_y = -\Omega_y, \quad \nabla^2 \Psi_z = -\Omega_z, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} + W \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \nabla^2 \Theta \quad (5)$$

Начальные и граничные условия для приведенной задачи (1)-(5) были представлены в виде:

$$\tau = 0: \Psi_x = \Psi_y = \Psi_z = \Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0, \quad \Theta = 0.5;$$

$$\tau > 0: \frac{\partial \Psi_x}{\partial X} = \Psi_y = \Psi_z = 0, \quad \Omega_x = 0, \quad \Omega_y = -\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial X^2}, \quad \Omega_z = -\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial X^2}, \quad \Theta = 0 \quad \text{при } X = 0, X = 1;$$

$$\Psi_x = \frac{\partial \Psi_y}{\partial Y} = \Psi_z = 0, \quad \Omega_x = -\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial Y^2}, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = -\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{при } Y = 0, Y = 1;$$

$$\Psi_x = \Psi_y = \frac{\partial \Psi_z}{\partial Z} = 0, \quad \Omega_x = -\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial Z^2}, \quad \Omega_y = -\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial Z^2}, \quad \Omega_z = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = 0 \quad \text{при } Z = 0, Z = 1;$$

$\Theta = 1$ на поверхности источника тепловыделения.

Кинетическое уравнение Больцмана для трехмерной задачи представлено в виде [4]:

$$f_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) = f_k(x, y, z, t)(1 - \omega) + \omega f_k^{\text{eq}}(x, y, z, t) \quad (6)$$

$$g_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) = g_k(x, y, z, t)(1 - \omega) + \omega g_k^{\text{eq}}(x, y, z, t) \quad (7)$$

здесь f_k – k -ая функция распределения (k определяется при выборе той или иной решеточной модели), f_k^{eq} – k -ая функция локального равновесного распределения, $\omega = (3\nu + 0,5)^{-1}$ – формула для расчета функции распределения для движения (ν – кинематическая вязкость), f_k и f_k^{eq} – функции используемые для определения макроскопических параметров скорости и плотности, g_k и g_k^{eq} – аналогичные функции для определения температуры, $\omega = (3a + 0,5)^{-1}$ – при расчете функций распределения для температуры (a – коэффициент теплопроводности).

Результаты и заключение. В процессе расчета решеточным методом Больцмана были использованы различные решеточные модели, а именно: D2Q4, D2Q5, D2Q9, D3Q15, D3Q19, D3Q27. На рисунке 2 представлено сравнение изолиний температуры для плоской и пространственной задач.

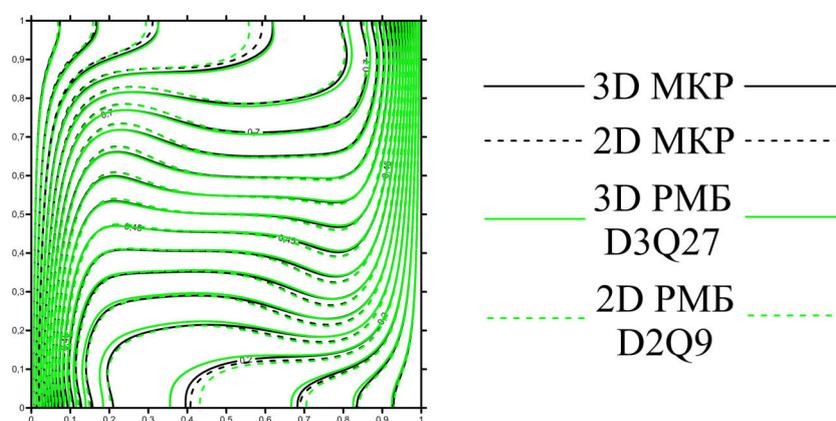


Рис. 2. Сравнение поля температуры

В результате исследований были получены температурные поля, а также поля распределения функций тока и скоростей для двумерного и трехмерного случаев методами МКР и РМБ. Проведена сравнительная оценка полученных результатов. При достаточно хорошем согласовании полученных данных можно сделать вывод о выигрыше в скорости расчета при использовании решеточного метода Больцмана. Только при использовании схемы D3Q27 общее время счета у РМБ было ниже относительно МКР.

Работа выполнена при финансовой поддержке Стипендии Президента РФ СП-1053.2018.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно технические ведомости. – 2004. – №2. – С. 70-80.
2. Куперштох А.Л. Метод решеточных уравнений Больцмана для моделирования двухфазных систем типа жидкость-пар // Современная наука. – 2010. – №2 (4). – С. 56-63.
3. Mohamad A. A. Lattice Boltzmann Method: Springer-Verlag London, 2011.
4. Su Y., Ng T., Davidson J.H. A Parallel Non-Dimensional Lattice Boltzmann Method for fluid flow and heat transfer with solid-liquid phase change // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2017. – Vol. 106. – P. 503-517

**ЗНАЧИМОСТЬ ИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ
ЛОПАТОЧНЫХ МАШИН**

Е.И. Гурина

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: elena.gyrina@gmail.com

**SIGNIFICANCE OF THE NUMERICAL EXPERIMENT IN THE PROCESS
OF TURBOMACHINERY DESIGN**

E.I. Gurina

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: elena.gyrina@gmail.com

***Abstract.** Computer simulation is the most modern method in the field of evaluating the parameters of a developed product in engineering problems. The essence of this method is to replace the real physical process that occurs during the operation of turbomachinery, its mathematical model. So, in this paper, we will present a methodology for the gas-dynamic calculation of an axial fan. Distributions of the main gas-dynamic parameters of the process studied (airflow velocity and pressure, mass flow rate) were obtained.*

Введение. В инженерном деле компьютерное моделирование является наиболее современным методом в области оценки параметров разрабатываемого изделия. Подход с заменой дорогостоящего цикла разработки численным экспериментом позволяет обнаружить и устранить основные недостатки конструкции еще этапе проектирования изделия. В работе представлена методика проведения газодинамического расчета осевого вентилятора с целью замены натурального эксперимента численным.

Геометрическая постановка задачи. Такие лопаточные машины, как вентиляторы, служат для превращения мощности двигателя в кинетическую энергию газа (рабочего тела). Преобразование энергии происходит в результате обтекания рабочим телом лопаток [1]. Используя результаты математического моделирования можно выявить основные недостатки геометрии профиля крыла лопатки и оценить аэродинамические характеристики всей конструкции еще на этапах разработки. Объектом исследования является осевой шахтный вентилятор, используемый при проветривании небольших выработок (Рис. 1). Основными элементами вентилятора являются: цилиндрический корпус (ЦК), рабочее колесо (РК), на котором закреплены лопатки (Л), спрямляющий аппарат (СА), а также электропривод (ЭП). Модель вентилятора является полноценной сборкой, состоящей из различных деталей, подборок и стандартных элементов [1]. Данная задача решается со следующими допущениями: не учитываются возмущения от входной решетки на входе в вентилятор, удалены все технологические отверстия, элементы крепежа, а также все внешние элементы корпуса.

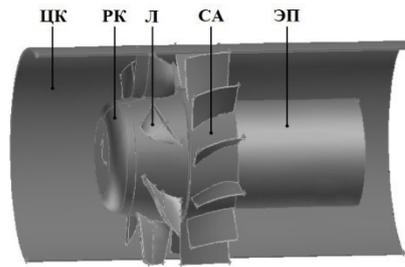


Рис. 1. Упрощенная геометрия осевого одноступенчатого вентилятора

Физико-математическая постановка задачи. Моделируется процесс трехмерного стационарного турбулентного изотермического течения несжимаемого воздуха, протекающего в проточной части осевого вентилятора с заданным значением массового расхода воздуха. Задача определить перепад полного давления развиваемого вентилятором. В рассматриваемом случае математическая модель, описывающая течение потока воздуха в проточной части вентилятора включает в себя осредненные по Рейнольдсу уравнение неразрывности и уравнения Навье-Стокса [2]:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i' u_j'}), \quad (2)$$

Здесь \bar{u}_i – осредненные проекции вектора скорости на оси координат Ox_i , ρ – плотность, \bar{p} – давление, ν – кинематическая вязкость воздуха, $u_i' u_j'$ – тензор напряжений Рейнольдса. Для замыкания системы уравнений (1)-(2) была использована двухпараметрическая стандартная $k - \varepsilon$ модель турбулентности, а также градиентно-диффузионная гипотеза Буссинеска [2]. Для данной задачи $k - \varepsilon$ модель турбулентности позволяет за небольшой промежуток времени получить качественные интегральные характеристики. Модель включает в себя два транспортных уравнения, для кинетической энергии турбулентности k и для скорости ее диссипации ε :

$$\frac{\partial \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_\tau}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P - \varepsilon, \quad \nu_\tau = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_\tau}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} E) P, \quad P = \nu_\tau \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j},$$

где P – генерация энергии турбулентности, ν_τ – турбулентная вязкость. Коэффициенты модели турбулентности: $C_{\varepsilon 1} = 1,44$; $C_{\varepsilon 2} = 1,92$; $C_\mu = 0,09$; $\sigma_k = 1,0$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$. Заданные граничные и начальные условия: полное давление на входе $P_{\text{tot}} = 101\,325 \text{ Па}$; условие прилипания на всех стационарных стенках $\mathbf{u} = \mathbf{0}$; массовый расход воздуха на выходе $Q = 8,3 \text{ кг/с}$. В качестве начального приближения в расчетной области принимается однородное распределение характеристик $P_0 = 101\,325 \text{ Па}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Угловая скорость вращения РК $\omega = -3000$ об/мин.

Построение расчетной области. Так как целью работы является замена натурального эксперимента, то геометрия вентилятора рассматривается в совокупности с геометрией испытательного стенда, который представляет собой цилиндрические патрубки, установленные до и после вентилятора, с целью стабилизации потока. Геометрия входного и выходного патрубков построена в соответствии с ГОСТом [3]. Отметим, что мы будем рассматривать только периодический сегмент проточной части, так как модель вентилятора имеет радиальную симметрию и входной/выходной патрубки соответственно.

Аппроксимация дифференциальной задача. Численное решение системы дифференциальных уравнений в частных производных осуществляется на основе метода конечного объема с использованием программного обеспечения ANSYS Fluent [4]. Конечно-объемная сетка содержит 1 800 325 элементов, на область вокруг лопатки РК приходится 30% всех элементов (Рис.2). Сгущение расчетных элементов выполнено вблизи пера лопатки и всех стенок. Для согласования полей скорости и давления на начальном этапе использовался метод SIMPLE, затем Coupled. Схемы аппроксимации по пространству и времени второго порядка точности.

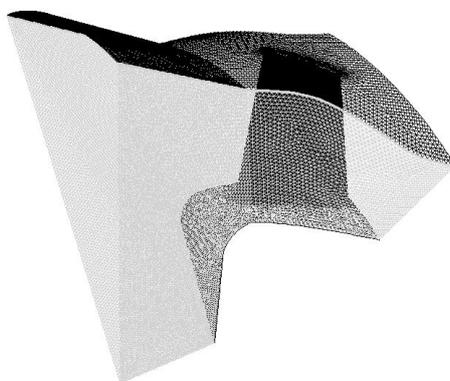


Рис. 2. Конечно-объемная расчетная сетка в области пера лопатки РК (периодический сегмент)

Анализ полученных результатов расчета. По известному массовому расходу воздуха и согласно построенной конечно-объемной сетке, проведен газодинамический расчет и получено значение перепада полного давления – 2679 Па. Для качественного анализа характеристик течения построены поля скоростей и давлений (Рис.3). Результаты моделирования показали оптимальность геометрии профиля крыла лопатки и безотрывное обтекание по всем основным высотам (основание, середина, периферия).

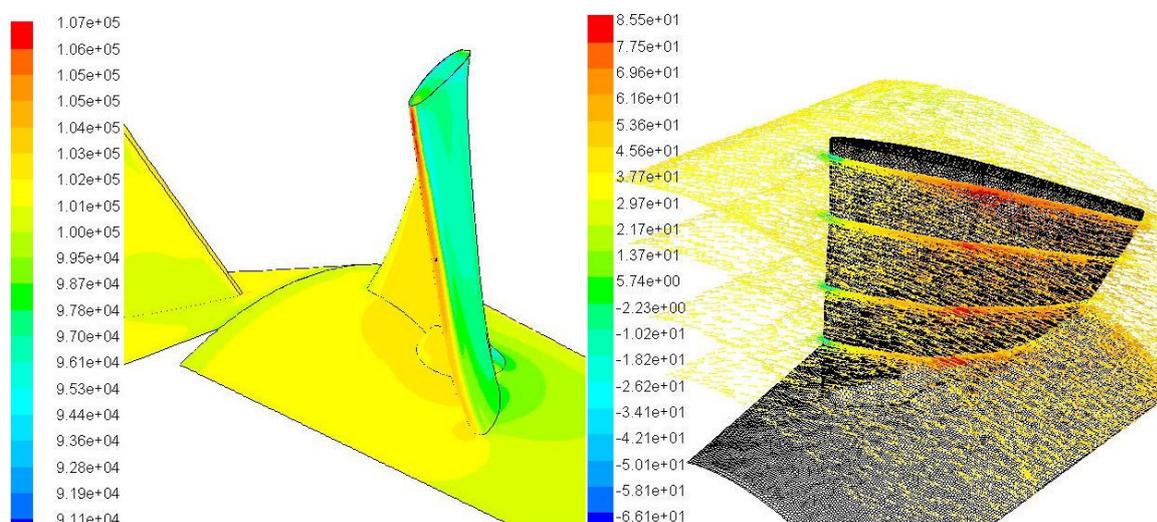


Рис. 3. Слева - распределение статического давления, Па; справа - поле векторов скорости, м/с

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брусиловский И.В. Аэродинамика осевых вентиляторов. – М.: Машиностроение, 1984. – 240 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
3. ГОСТ 10921-90. Вентиляторы радиальные и осевые. Методы аэродинамических испытаний [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://docs.cntd.ru/document/gost-10921-90> (дата обращения: 08.03.2020). 4.
4. Фролов Д. Многодисциплинарный анализ как требование современного мира // Инженерно-технический журнал «ANSYS Advantage. Русская редакция» – 2015. – № 11. – С. 1–3.

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОНОТОННОЙ СХЕМЫ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ПОТОКОВ**

Д.О. Диль, М.М. Какышев

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: gradpower@list.ru

**NUMERICAL SIMULATION OF THE DISPLACEMENT PROCESS OF OIL BY WATER USING A
MONOTONIC FLUX APPROXIMATION SCHEME**

D.O. Dil, M.M. Kakyshev

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: gradpower@list.ru

***Abstract.** Cell centered finite volume fully implicit formulation with a higher order approximation for convective transport is presented for modeling immiscible incompressible two-phase flow in an undeformable reservoir. Values of water saturation on the faces of finite volumes were calculated using one of monotonic upstream scheme for conservation laws (MUSCL). Discrete equations were solved using the Newton's iterative method. Numerical results of solving Buckley and Leverett problem showed the advantages of the higher order method compared to standard upwind scheme.*

Введение. При разработке нефтяных месторождений во многих случаях для увеличения эффективности извлечения нефти используются дополнительные нагнетательные скважины, через которые в пласт поступает вода или газ. Математическое моделирование процесса вытеснения нефти водой или же газом часто представляет собой сложную задачу. Это обусловлено необходимостью моделирования течений в осадочных средах, включающих в себя различные неровности, каналы, трещины и разломы [1]. В результате поиск эффективных подходов численного моделирования этого процесса становится актуальной задачей.

Численное моделирование процесса двухфазной фильтрации (деление на фазы возникает вследствие различной смачиваемости породы водой и нефтью) на практике очень эффективно осуществляется с помощью метода конечных объемов. В существующих программных пакетах для аппроксимации насыщенных на гранях объемов часто используется простая схема против потока, которая имеет первый порядок точности (First Order Upwind, FOU). Недостатком этой схемы является значительная погрешность при оценке распространения фронта вытеснения. Одним из методов повышения порядка точности аппроксимации является использование монотонных противопотоковых схем для законов сохранения (MUSCL). В ряде работ [1-3] подобные схемы были использованы совместно с широко распространенной явной по насыщенности и неявной по давлению схемой дискретизации по времени (IMplicit Pressure Explicit Saturation, IMPES). Недостатками этого метода по сравнению с полностью неявной схемой являются существенные ограничения на шаг по времени, а также отсутствие возможности использования данного подхода к моделированию сильно сжимаемых

газообразных сред. Целью данной работы был поиск эффективной схемы типа MUSCL для использования совместно с полностью неявной схемой.

Математическая модель. Для описания процесса двухфазной фильтрации воспользуемся моделью, в основу которой положен обобщенный закон Дарси [4]:

$$\vec{w}_w = \frac{Q_w}{\omega} = -k \frac{k_w(s) \partial(p_o - p_c)}{\mu_w \partial x} \quad \text{и} \quad \vec{w}_o = \frac{Q_o}{\omega} = -k \frac{k_o(s) \partial p_o}{\mu_o \partial x},$$

где \vec{w}_w – скорость фильтрации воды, \vec{w}_o – скорость фильтрации нефти, μ_w и μ_o – коэффициенты динамической вязкости воды и нефти, k_w, k_o – относительные фазовые проницаемости, $s \equiv s_w$ – влагонасыщенность.

Уравнения неразрывности для каждой из фаз примут следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_w m s}{\partial t} + \text{div} \rho_w \vec{w}_w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial p_o m (1-s)}{\partial t} + \text{div} \rho_o \vec{w}_o = 0.$$

Для определения относительных фазовых проницаемостей воспользуемся полуэмпирическими соотношениями для воды и нефти:

$$k_w = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leq s \leq 0,2 \\ \left[\frac{s-0,2}{0,8} \right]^{3,5} \text{ при } 0,2 \leq s \leq 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad k_o = \begin{cases} \left[\frac{0,85-s}{0,85} \right]^{2,8} (1+2,4s) \text{ при } 0 \leq s \leq 0,85 \\ 0 \text{ при } 0,85 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Далее представлено капиллярное давление:

$$p_c = 2\rho 9,8(1-s^2)^{0,5} / s^2,$$

где m – коэффициент пористости, p_c – капиллярное давление, p_o – давление нефти. Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} s(x, 0) &= s_0, \quad p(x, 0) = p_0, \quad 0 < x < L; \\ s(0, t) &= s_{\max}; \quad p(0, t) = p_{\max}; \quad p(L, t) = p_0. \end{aligned}$$

Экспериментальная часть. Вычисления проводились для процесса вытеснения нефти водой из модельного прямолинейного горизонтального пласта, пористость и проницаемость которого постоянны и равны 0,03 и 0,2 Дарси ($\approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$) соответственно. Длина пласта равна $L = 1000$ м, вязкость воды принималась равной $\mu_w = 0,001$ Па·с, вязкость нефти $\mu_o = 0,005$ Па·с. Для дискретизации определяющих уравнений по пространству использовался метод конечных объёмов. При вычислении потоков на гранях объёмов для определения значений насыщенности использовалась следующая схема типа MUSCL:

$$\tilde{s}_j = \begin{cases} s_j + \nabla s_j \Delta x_j \text{ при } p_j > p_l \\ s_l + \nabla s_l \Delta x_l \text{ при } p_l \geq p_j \end{cases}$$

где l – номер текущего объёма, а j – соседнего, которому также принадлежит рассматриваемая грань. Дискретные градиенты ∇s_j и ∇s_l определялись с использованием значений в соседних объёмах.

Результаты. На рисунке 1 представлены распределения влагонасыщенности, полученные различными методами для стандартной тестовой задачи Баклея-Левретта, имеющей аналитическое

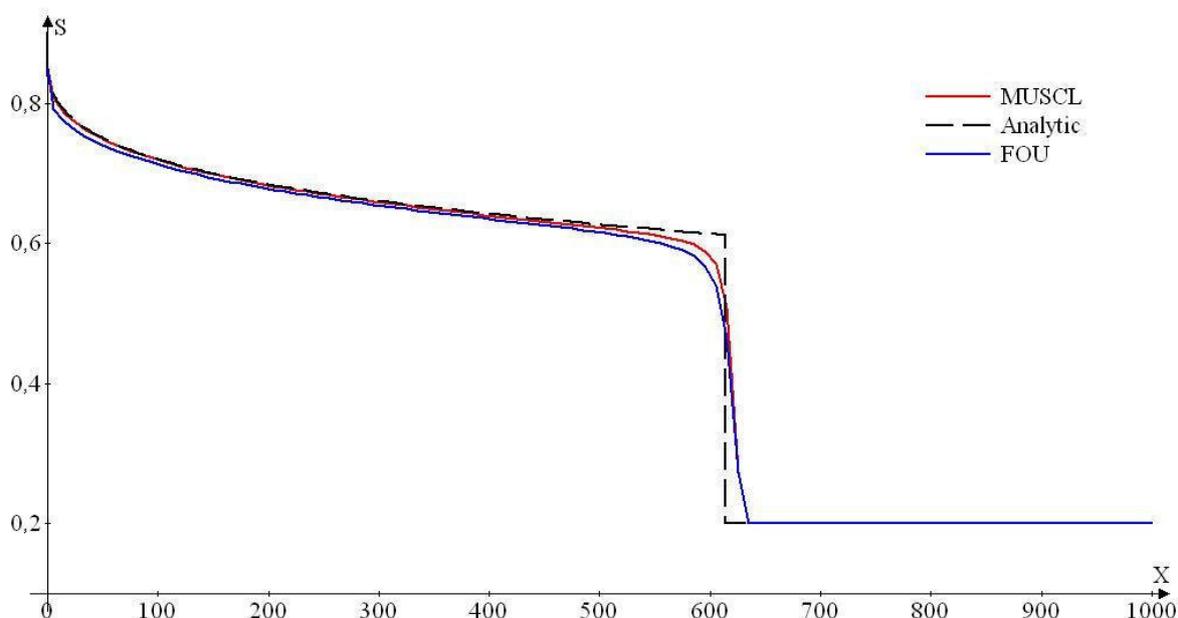


Рис. 1. Распределения влагонасыщенности (S) для момента времени 6 месяцев

решение (Analytic). Из графиков видно, что использованная в работе схема типа MUSCL позволяет получить более точное решение по сравнению со схемой против потока первого порядка точности (FOU). Этот вывод подтверждается также сравнением ошибок определения поля насыщенности по норме L_1 [4]. Так ошибка для метода FOU составляла 0,012, в то время как ошибка для метода MUSCL была вдвое меньше.

Заключение. В результате проведенного исследования было установлено, что предложенная схема типа MUSCL значительно эффективнее в расчетах двухфазных фильтрационных течений, чем стандартная схема против потока. Полученные результаты могут быть полезны при численном моделировании и прогнозе добычи углеводородов.

Работа выполнена при поддержке научно-образовательного регионального математического центра при национальном исследовательском Томском государственном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Contreras F.R.L, Lyra P.R.M. (2016). A cell centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. *Computers and Fluids*, no. 127, pp. 1–16.
2. Edwards MG. (2006). Higher-resolution hyperbolic-coupled-elliptic flux-continuous CVD schemes on structured and unstructured grids in 2-D. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, no. 51, pp. 1059–1077.
3. Fernandes B.R.B (2015). A 3D total variation diminishing scheme for compositional reservoir simulation using the element-based finite-volume method. *Numerical Heat Transfer, Part A*, no 67, pp. 839–856.
4. Dil D.O, Bubenchikov A.M. (2016). Numerical approach to solving problems of two-phase multicomponent flow in porous medium based on finite volume method. *Key Engineering Materials*, no. 685, pp. 80–84.

**АНАЛИЗ ДАННЫХ МНОГОЗОНАЛЬНОЙ АЭРОФОТОСЪЁМКИ МЕТОДОМ ГЛАВНЫХ
КОМПОНЕНТ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ИСТОРИЧЕСКИХ ТЕРРИТОРИЙ**А.Г. Злобина

Удмуртский Федеральный Исследовательский Центр УрО РАН,

Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, д. 34, 426067

E-mail: ELF54@yandex.ru**ANALYSIS OF DATA OF MULTISPECTRAL AERIAL PHOTOGRAPHY BY PRINCIPAL
COMPONENTS ANALYSIS IN THE STUDY OF HISTORICAL TERRITORIES**A.G. Zlobina

Udmurt Federal Research Center, Russia, Izhevsk, T. Baramzina str, 34, 426067

E-mail: ELF54@yandex.ru

Abstract. *An approach of multispectral aerial photography data processing is proposed, based on the application of the principal components analysis and visualization of the last principal component. The effectiveness of its use is shown in identifying a site of anthropogenic impact (overgrown plowing of the Pudemsky ironworks, XVIII-XIX centuries), which lost its external distinguishing features from the environment.*

Введение. Конец XVIII – первая половина XIX вв. был периодом бурного развития горнозаводской отрасли Урала и Предуралья. Формировались горнозаводские округа, представляющие собой исторически сложившиеся сложноорганизованные территориальные социально-экономические комплексы с многоукладной системой заводского хозяйства [1]. Помимо промышленных сооружений они включали в себя обширные земельные угодья с сырьевыми и топливно-энергетическими ресурсами, пашни, луга, и т.д. Управление природными ресурсами носило экстенсивный характер, что в конечном итоге привело к быстрой выработке рудников и истреблению лесов. Это является одной из основных причин кризиса данной отрасли в последующий период. На сегодняшний момент территории, принадлежащие горнозаводским округам, утратили внешние отличительные признаки.

Традиционно для обнаружения следов антропогенной деятельности используют косвенные дешифровочные признаки, а именно – изменение растительного покрова в пределах локального участка. Данную информацию возможно получить по результатам многозональной аэрофотосъёмки [2]. Как правило, анализируются снимки поверхности в красном и ближнем инфракрасном спектральных каналах [3], а также вычисляются вегетационные индексы [4], обеспечивающие более контрастное выделение зелёной фитомассы.

В процессе восстановления растительного покрова различия между участком антропогенного воздействия и окружающей его территорией постепенно сглаживаются. Растительный покров становится более однородным, поэтому задача выявления таких участков значительно усложняется. В данном случае предлагается использовать другой подход, основанный на применении метода главных компонент (РСА). Принято считать, что только в первых главных компонентах, объясняющих большую часть дисперсии, содержится полезная информация. Поэтому оставшимися главными компонентами, как правило, пренебрегают [5]. В рамках предложенного подхода именно последние главные компоненты будут представлять больший интерес для исследования. Это объясняется тем, что при визуализации

последних главных компонент отображаются минимальные различия на снимках в разных спектральных каналах. Такие детали, «заглушенные» более высоким контрастом в исходных данных, соответствуют незначительным изменениям растительного покрова и могут быть приняты в качестве дешифровочного признака для обнаружения участка антропогенного воздействия.

Метод обработки. Исходные снимки, полученные в результате многозональной аэрофотосъёмки, представляют собой цифровые изображения. Данные коррелированные, то есть при увеличении значения яркости пикселя в одном спектральном канале увеличиваются значения яркости и в других. Использование метода PCA позволяет устранить корреляционные зависимости.

Введём обозначения: m – число признаков (спектральных каналов); n – количество пикселей изображения (снимка); $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})^T$ – вектор-столбец из значений яркости пикселей в i -ом спектральном канале; $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m)$ – матрица исходных данных; $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – матрица главных компонент.

Алгоритм преобразования исходных данных \mathbf{X} в главные компоненты \mathbf{Y} осуществляется по следующей схеме [5]:

Шаг 1. Стандартизация признаков:

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})^T \Rightarrow \mathbf{z}_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{im})^T, \text{ где } z_{ij} = (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 / s_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Шаг 2. Вычисление собственных векторов $\Lambda = \{\alpha_i\}_{i=1}^m : \alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im})^T$ и собственных чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ корреляционной матрицы стандартизированных исходных данных $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m)$. Упорядочивание собственных чисел по убыванию: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$.

Шаг 3. Определение матрицы главных компонент: $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\Lambda$.

Полученные в результате данного преобразования главные компоненты $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_m$ ортогональны (попарно линейно независимы) и упорядочены по убыванию дисперсии. Дальнейший анализ результатов многозональной аэрофотосъёмки будет сведён к анализу последних главных компонент с целью выявления незначительных изменений в растительном покрове.

Натурный эксперимент и результаты. Исследование выполнено на исторической территории Пудемского железодобывающего завода (XVIII–XIX вв., с. Пудем, Удмуртская Республика). Участок многозональной аэрофотосъёмки отмечен красным контуром на плане Вятской губернии Глазовского уезда 1825 г. (рис. 1а). Согласно данному плану часть лесного массива была расчищена под пашню (рис. 1а, оранжевая штриховка). После закрытия завода участок уже не использовался для сельскохозяйственных нужд и, как следствие, заброшенная пашня вновь заросла лесной растительностью. На сегодняшний момент она не имеет внешних отличительных признаков ни при натурном обследовании, ни на снимках в видимом диапазоне спектра (рис. 1б), ни и в разных спектральных каналах (рис. 2).

Для выявления участка антропогенного воздействия данные многозональной аэрофотосъёмки были обработаны методом PCA. Так как заросшая пашня визуально неотличима от окружающей территории, её косвенным дешифровочным признаком будут незначительные изменения растительного покрова. Эти изменения проявились при визуализации четвёртой главной компоненты (рис. 1в),

объясняющей 6% суммарной дисперсии. Таким образом, на последней главной компоненте содержалась полезная информация о следах антропогенной деятельности на данной исторической территории.

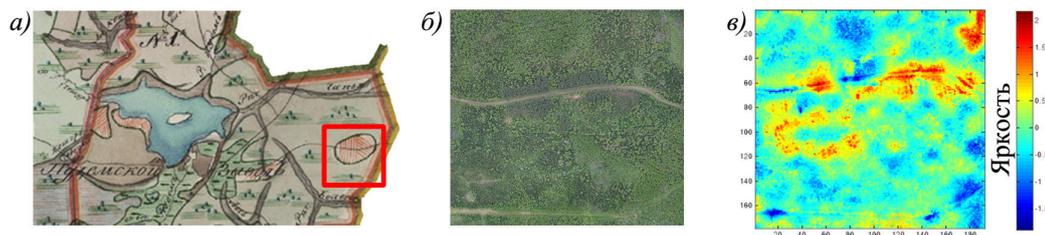


Рис. 1. Пудемский железодельный завод: а) фрагмент плана Вяткой губернии Глазовского уезда 1825 г., б) участок съёмки в видимом диапазоне спектра, в) четвёртая главная компонента

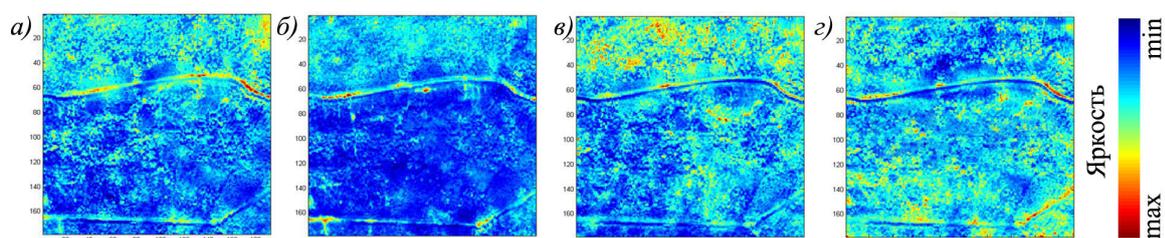


Рис. 2. Многозональная аэрофотосъёмка: а) зелёный канал, б) красный канал, в) граничный красный канал, г) ближний инфракрасный канал

Заключение. На примере исследования исторической территории Пудемского железодельного завода показана эффективность применения метода PCA при выявлении участка антропогенного воздействия. Заросшая пашня, визуально не отличающаяся по растительному покрову от окружающей среды, проявилась на главной компоненте, определяющей минимальные различия снимков по всем спектральным каналам. Правомерность интерпретации главной компоненты подтверждают априорные сведения – план Вятской Губернии Глазовского уезда 1825 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ, проект № 19-18-00322.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васина Т.А. Формирование горнозаводских округов в конце XVIII – первой половине XIX веков на территории современной Удмуртии // Научный диалог. – 2019. – № 7. – С. 222–239.
2. Brooke C., Clutterbuck B. Mapping heterogeneous buried archaeological features using multisensor data from unmanned aerial vehicles // Remote sensing. – 2020. – V. 12, № 41. – P. 1–31.
3. Schowengerdt R.A. Remote sensing. Models and methods for image processing. 3d ed. – Amsterdam: Elsevier, 2007. – 560 p.
4. Черепанов А.С. Вегетационные индексы // Геоинформатика. – № 2. – 2011. С. 98–102.
5. Jolliffe I.T. Principal Components Analysis. 2nd ed. – N.Y.: Springer-Verlag New York Inc., 2002. – 487 p.

**ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ГЕНЕРАЦИИ МОМЕНТ-MATCHING ПОСТРОЕНИЯ
СЦЕНАРИЕВ ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ**

Ю.К. Измestьева

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. М.Е. Семёнов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: riitutoriisa@gmail.com

**AN ALGORITHM FOR MOMENT-MATCHING SCENARIO GENERATION WITH
APPLICATION TO FINANCIAL PORTFOLIO**

U.K. Izmestyeva

Scientific Supervisor: Docent, Ph.D. M.E. Semenov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: riitutoriisa@gmail.com

***Abstract.** In the present study, we realize an algorithm for moment-matching scenario generation. This method produces scenarios and corresponding probability weights that match exactly the given mean, the covariance matrix, the average of the marginal skewness and the average of the marginal kurtosis of each individual component of a random vector. Optimisation is not employed in the scenario generation process and thus the method is computationally more advantageous than previous approaches.*

Введение. Одним из классических подходов к решению задач, включающих в себя неопределенность и риск, является стохастическое программирование. Для того чтобы стохастическая программа выдавала численный результат, используемое распределение должно аппроксимироваться через дискретные распределения с конечным числом результатов [1]. Этим процессом является алгоритм генерации сценариев.

Методы генерации «moment-matching» сценариев успешно применяются в задаче стохастической оптимизации [2]. Они обладают следующими преимуществами – эти методы не привязаны к определенной области и позволяют формировать различные границы. Алгоритм, рассматриваемый в этой работе, практически не включает в себя оптимизацию, поэтому вычислительная скорость этого метода больше, чем у прочих.

Цель работы: Применить метод «moment-matching» для генерации сценариев портфеля ценных бумаг.

Задачи:

1. Изучить литературу по исследуемой теме;
2. Реализовать метод в среде MathCAD;
3. Собрать исторические данные и применить к ним изучаемый метод;
4. Интерпретировать полученные результаты.

Материалы и методы исследования. Алгоритм был разработан и опубликован в работе под авторством Пономарёвой, Романа и Дэйта [3], а позднее дополнен коррективами, определёнными в работе Контрераса, Боша и Херрера [4]. Дополнения касались условий, параметров, а также шагов алгоритма, которых не хватало методу для правильного построения сценариев.

Всего данный алгоритм состоит из 5 шагов. В качестве входных параметров для него берутся вектор средних значений μ , матрица ковариации Σ , средние предельные моменты третьего и четвертого порядков \bar{k} и $\bar{\xi}$, n – количество ценных бумаг, число сценариев s и скаляр $\rho \in (0, 1)$.

Шаг №1. На данном этапе происходит вычисление вектора Z и матрицы L , способы расчёта которых можно выбрать различные. В данной работе эти параметры рассчитывались следующим образом: $Z = \rho \sqrt{\lambda} v$, где λ и v – это собственное число и соответствующий ему собственный вектор. Выбираются они по наибольшему собственному значению. Матрица L рассчитывается как $L = \sqrt{\Sigma - ZZ^T}$.

Шаг №2. Здесь происходит проверка неравенства:

$$\frac{n\bar{k}}{\sum_{i=1}^N Z_i^4} - \left(\frac{n\bar{\xi}}{\sum_{i=1}^N Z_i^3} \right)^2 > 1 + 2 \sqrt{\frac{n \sum_{i,j} L_{ij}^4}{\sum_{i=1}^N Z_i^4} + n \frac{\sum_{i,j} L_{ij}^4}{2s^2 \sum_{i=1}^N Z_i^4}}.$$

Эта проверка необходима для того, чтобы убедиться, что рассчитываемые далее параметры будут положительными.

Шаг №3. Рассчитываются следующие переменные:

$$A = \frac{N\bar{k}}{\sum_{i=1}^N Z_i^4} - \left(\frac{N\bar{\xi}}{\sum_{i=1}^N Z_i^3} \right)^2, B = \frac{\sum_{i,j} L_{ij}^4}{2s^2 \sum_{i=1}^N Z_i^4}, p^* = \sqrt{\frac{B}{2NA}}, p_{s+1}^* = 1 - 2Nsp^*, v^* = (\sqrt{A} - \sqrt{2NBs})^2, \text{ где}$$

p^*, p_{s+1}^* – это весовые вероятности.

Шаг №4. Далее рассчитывается $\varepsilon_k = u_k p^* \sqrt{\frac{v^* - 1}{p_{s+1} A - 1}}, k = 1, \dots, s/2$, где u_k – вектор случайных равномерно распределённых чисел. Используя эту величину, пересчитываем весовые вероятности: как $p_k = p^* + \varepsilon_k$ для $k = 1, \dots, s/2$, $p_k = p^* - \varepsilon_k$ для $k = s/2 + 1, \dots, s$, а также $p_{s+1} = p_{s+1}^*$. Затем рассчитываются оставшиеся величины:

$$\phi_1 = \frac{N\bar{\xi} \sqrt{p_{s+1}}}{\sum_{j=1}^N Z_j^3}, \phi_2 = \frac{N\bar{k} - \frac{1}{2s^2} \sum_{l,k} L_{lk}^4 (\sum_{i=1}^s \frac{1}{p_i})}{\sum_{j=1}^N Z_j^4}, \alpha = \frac{1}{2} \phi_1 + \frac{1}{2} \sqrt{4\phi_2 - 3\phi_1^2},$$

$$\beta = -\frac{1}{2} \phi_1 + \frac{1}{2} \sqrt{4\phi_2 - 3\phi_1^2}, w_1 = \frac{1}{\alpha(\alpha + \beta)}, w_2 = \frac{1}{\beta(\alpha + \beta)}, w_0 = 1 - \frac{1}{\beta\alpha}.$$

Шаг №5. Последним шагом вычисляются сценарии и соответствующие им вероятности:

$$X_{ik}^\pm = \mu \pm \frac{1}{\sqrt{2sp_k}} L_i, X_\alpha = \mu + \frac{\alpha}{\sqrt{p_{s+1}}} Z, X_\beta = \mu - \frac{\beta}{\sqrt{p_{s+1}}} Z, X_0 = \mu,$$

$$V(X_{ik}^+) = V(X_{ik}^-) = p_k, V(X_0) = p_{s+1} w_0, V(X_\alpha) = p_{s+1} w_1, V(X_\beta) = p_{s+1} w_2.$$

Результаты. Для практической реализации исследуемого метода были выбраны исторические данные компаний Газпром, Сбербанк и ВТБ за период с 01.01.2016 по 01.01.2018 год. Вычисления производились в пакете MathCAD. Скаляр $\rho = 0,7$. Количество генерируемых сценариев принималось равным 10, количество ценных бумаг соответственно равнялось 3. Матрица ковариации, вектор средних,

а также средние моменты 3-его и 4-ого порядков рассчитывались по относительным приращениям цен акций выбранных компаний. После определения входных параметров вычислялся приведённый раньше алгоритм. На выходе были получены сценарии и их вероятности.

Таблица 1

Вывод сценариев-векторов для ценных бумаг

Сценарий	№	1	2	3	4	5	6	7
ценная бумага	1	0,102	0,087	0,097	0,105	0,103	-0,115	-0,167
	2	0,126	0,107	0,120	0,129	0,127	-0,133	-0,196
	3	0,129	0,109	0,123	0,133	0,130	-0,145	-0,212
Сценарий	№	8	9	10	0	α	β	
ценная бумага	1	-0,123	-0,110	-0,113	0,002	0,138	0,091	
	2	-0,143	-0,128	-0,131	0,006	0,226	0,149	
	3	-0,156	-0,140	-0,143	0,002	0,207	0,135	

Таблица 2

Вывод вектора вероятностей сценариев-векторов

№	1	2	3	4	5	6	7
Вероятности	0,0055	0,0077	0,0061	0,0052	0,0054	0,0041	0,0020
№	8	9	10	0	α	β	
Вероятности	0,0036	0,0045	0,0042	0,6740	0,0140	0,0220	

Заключение. В ходе данной работы был рассмотрен, реализован и применён на реальных данных алгоритм нахождения сценариев методом «moment-matching». Во время выполнения алгоритма были успешно пройдены основные проверки корректности вычисляемых параметров, что позволяет сделать вывод о адекватности получившихся сценариев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермольев Ю.М., Ястремский А.И., Стохастические модели и методы в экономическом планировании, М.,1979.
2. Date, P., Jalen, L., & Mamon, R. (2008). A new algorithm for latent state estimation in nonlinear time series models. Applied Mathematics and Computation, 203, 224–232.
3. Ponomareva K., Roman D., Date P. An algorithm for moment-matching scenario generation with application to financial portfolio optimization, Stochastics and Statistics, School of Information Systems, Computing and Mathematics, Brunel University, UK
4. Juan Pablo Contreras, Paul Bosch, Mauricio Herrera, Comment on “An algorithm for moment-matching scenario generation with application to financial portfolio optimization”, Facultad de Ingeniería, Universidad del Desarrollo, Ave. Plaza 680, Las Condes, Santiago de Chile, Chile

НОРМИРОВКА ОТОБРАЖЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ И ХОДОВОЕ УРАВНЕНИЕ ЛЕВНЕРА

И.А. Колесников

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: ia.kolesnikoc@mail.ru

NORMALIZATION OF MAPPING AT INFINITY AND THE CHORDAL LOEWNER EQUATION

I.A. Kolesnikov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin ave., 36, 634050

E-mail: ia.kolesnikoc@mail.ru

Abstract. *The paper gives a special normalization at infinity of an analytical mapping from the half-plane onto simply connected domain. We research the connection between the normalization and the chordal Loewner equation.*

В работе рассматриваются некоторые способы нормировки отображения на бесконечности. Устанавливается связь между этими нормировками и нормировкой отображения, удовлетворяющего хордовому уравнению Левнера.

Пусть Δ – односвязная область. Согласно теореме Римана существует голоморфное и однолистное отображение f из верхней полуплоскости Π^+ на область Δ . Единственность можно обеспечить, нормировав отображение f , классическими являются внутренняя и граничная нормировки [1].

Пусть Δ – односвязная область, с границей содержащей хотя бы одну дугу окружности или вершину, образованную дугами окружностей. Рассмотрим следующие способы нормировки отображения f , $f: \Pi^+ \rightarrow \Delta$.

1) Пусть бесконечность принадлежит отрезку прямой, составляющей границу области Δ . Можно потребовать $f(\infty) = \infty =: A$, тогда f имеет на бесконечности разложение

$$f(z) = Hz + B + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots,$$

где $B \in \mathbb{C}$, $H \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В разложении можно задать H и B .

2) Пусть бесконечность является вершиной области Δ , образованной двумя лучами, угол при этой вершине имеет раствор $\alpha\pi$, $\alpha \in (-2, -1) \cup (-1, 0)$. Можно потребовать $f(\infty) = \infty =: A$, тогда f имеет на бесконечности разложение

$$f(z) = A^* + \frac{H}{z^\alpha} + \frac{B}{z^{\alpha+1}} + \frac{c_1}{z^{\alpha+2}} + \frac{c_2}{z^{\alpha+3}} + \dots,$$

где $B \in \mathbb{C}$, $H \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $A^* \in \mathbb{C}$ – точка пересечения прямых, образующих угол на бесконечности. В разложении можно задать H и B .

3) Пусть $A \in \mathbb{C}$ – точка, принадлежащая дуге окружности, составляющей границу области Δ . Можно потребовать $f(\infty) = A$, тогда f имеет на бесконечности разложение

$$f(z) = A + \frac{H}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{c_1}{z^3} + \frac{c_2}{z^4} + \dots,$$

где $B \in \mathbb{C}$, $H \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В разложении можно задать H и B .

4) Пусть $A \in \mathbb{C}$ – вершина области Δ , образованная отрезками прямых, угол при этой вершине имеет развор $\alpha\pi$, $\alpha \in (0,1) \cup (1,2]$. Можно потребовать $f(\infty) = A$, тогда f имеет на бесконечности разложение

$$f(z) = A + \frac{H}{z^\alpha} + \frac{B}{z^{\alpha+1}} + \frac{c_1}{z^{\alpha+2}} + \frac{c_2}{z^{\alpha+3}} + \dots,$$

где $B \in \mathbb{C}$, $H \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В разложении можно задать H и B .

5) Пусть $A \in \mathbb{C}$ – вершина области Δ с углом раствора $\alpha\pi$, $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$, образованная дугами окружностей. Можно потребовать $f(\infty) = A$, тогда разложение f на бесконечности можно представить в виде

$$\frac{f(z) - A}{f(z) - A^*} = \frac{H}{z^\alpha} + \frac{B}{z^{\alpha+1}} + \frac{c_1}{z^{\alpha+2}} + \frac{c_2}{z^{\alpha+3}} + \dots,$$

где $B \in \mathbb{C}$, $H \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $A^* \in \mathbb{C}$ – точка пересечения дуг окружностей, образующих угол A , смежная для точки A . В разложении можно задать H и B .

6) Пусть бесконечность является вершиной области Δ с углом раствора $\alpha\pi$, $\alpha \in \{-2, -1, 0\}$, образованной двумя лучами. Можно потребовать $f(\infty) = \infty =: A$, тогда f имеет на бесконечности разложение

$$f(z) = \gamma e^{i\varphi} \ln z + z^{-\alpha} \left(H + \frac{B}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \dots \right),$$

где γ характеризует расстояние между лучами, образующими угол на бесконечности, φ – угол между лучом, уходящим на бесконечность, и вещественной осью, $B, H \in \mathbb{C}$ если $\alpha = 0$ и $B \in \mathbb{C}$, $H \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ если $\alpha \in \{-2, -1\}$. В разложении можно задать H и B .

7) Пусть $A \in \mathbb{C}$ – вершина области Δ с углом раствора $\alpha\pi$, $\alpha \in \{0, 1, 2\}$, образованная дугами окружностей. Можно потребовать $f(\infty) = A$, тогда f имеет на бесконечности разложение

$$\frac{1}{f(z) - A} = \gamma e^{i\varphi} \ln z + z^\alpha \left(H + \frac{B}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \dots \right),$$

где γ характеризует отношение радиусов окружностей, образующих угол в вершине A , φ – угол между касательной в точке A и вещественной осью, $B, H \in \mathbb{C}$ если $\alpha = 0$ и $B \in \mathbb{C}$, $H \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ если $\alpha \in \{1, 2\}$. В разложении можно задать H и B .

Лемма 1. Пусть отображения f , g голоморфно и однолистно отображающие верхнюю полуплоскость на область D , удовлетворяют одной из нормировок 1)–7), тогда $f = g$ в D .

Рассмотрим семейство областей, получаемое из области Δ проведением разреза длины l вдоль непрерывной кривой, начинающейся в точке w_0 , $w_0 \neq A$. Получившееся семейство областей обозначим

через $\Delta(l)$, $0 \leq l \leq L$. Эволюцию семейства отображений f можно описать хордовым уравнением Левнера [2].

Лемма 2. Пусть семейство отображений $f: \Pi^+ \rightarrow \Delta(l)$ нормировано одним из условий 1)–7). Тогда коэффициент $c_1(l)$ является монотонной функцией одного знака.

Лемма 3. Пусть семейство отображений $f: \Pi^+ \rightarrow \Delta(l)$, $f = f(z, l)$, нормировано одним из условий 1)–7). Пусть при l стремящемся к L разрез замыкается на точку W , $W \neq A$, принадлежащую границе области $\Delta(0)$. Семейство областей $\Delta(l)$ имеет два ядра, обозначим через Δ_L то из этих двух ядер, границе которого принадлежит точка A . Тогда семейство отображений $f(z, l)$ сходится равномерно внутри верхней полуплоскости к отображению $f(z, L)$, переводящему верхнюю полуплоскость на область Δ_L .

Теорема 1. Пусть семейство отображений f из верхней полуплоскости на семейство областей $\Delta(l)$ удовлетворяет одной из нормировок 1)–7) (точка A не принадлежит разрезу и $A \neq w_0$, коэффициенты в разложении $f(z, l)$ на бесконечности зависят от параметра l). Тогда f удовлетворяет хордовому уравнению Левнера

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} + \frac{2}{z - \lambda(t)} \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} = 0, \quad f(z, t_0) = f_0(z), \quad t \in [t_0, T]$$

где $t = \frac{c_1(l)}{2\gamma e^{i\varphi}}$ в случаях нормировок 6), 7) при $\alpha = 0$, $t = -\frac{c_1(l)}{2\alpha H}$ в случае нормировки 7) при $\alpha \in \{1, 2\}$

и $t = \frac{c_1(l)}{2\alpha H}$ в остальных случаях, $\alpha\pi$ – угол при вершине A ($\alpha = 1$ в случае 3)); $f_0: \Pi^+ \rightarrow \Delta$, $\lambda(t)$ – прообраз конца разреза при отображении f , Δ – область со стертым разрезом.

Для отображения из полуплоскости на односвязную область с границей, содержащей дугу окружности или вершину, образованную дугами окружностей, нормировки 1)–7) являются аналогом гидродинамической нормировки, используемой в хордовом уравнении Левнера для семейства отображений из полуплоскости на полуплоскость с разрезом, в смысле теоремы 1.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 510 с.
2. Lawler G., Schramm O., Werner W., Values of Brownian intersection exponents I: Half-plane exponents // Acta Math. – 2012. – V. 187. – pp. 237–273.

**РАСШИРЕНИЕ КОНДЕСАТА В КОЛЬЦЕВОЙ ЛОВУШКЕ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ
ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО**

А.Е. Кулагин

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: ae8@tpu.ru

**EXPANSION OF THE CONDENSATE IN A RING-SHAPED TRAP IN A SEMICLASSICAL
APPROXIMATION FOR THE GROSS-PITAEVSKII EQUATION**

A.E. Kulagin

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: ae8@tpu.ru

***Abstract.** The nonlocal Gross-Pitaevskii equation describing the expansion of the Bose-Einstein in the ring-shaped trap potential is studied in a semiclassical approximation. The first-order Hamilton-Ehrenfest system for the semiclassically concentrated solutions of the given Gross-Pitaevskii equation is considered. The correspondence between the solutions of the Hamilton-Ehrenfest system and the numerical solutions of the initial Gross-Pitaevskii equation is shown. The remarks about the applicability of the semiclassical approximation to the considered problem are given.*

Введение. Для описания бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) в ловушках широко используется уравнение Гросса-Питаевского. Развитие экспериментальных возможностей позволило получать БЭК в ловушках со сложной геометрией (см. [1, 2] и ссылки в них). Поэтому наряду с экспериментальным интересом возник интерес и к математическому описанию таких структур. В работе [3] был предложен метод построения решений задачи Коши для нелокального уравнения Гросса-Питаевского, квазиклассически сосредоточенных на кривых, динамика которых описывается «классическими» уравнениями (системой Гамильтона-Эренфеста). Качество квазиклассического приближения во многом определяется тем, насколько хорошо «классические» уравнения описывают эволюцию кривой локализации конденсата. В данной работе мы рассматриваем задачу описания расширения конденсата в кольцевой ловушке с помощью системы Гамильтона-Эренфеста в рамках метода, представленного в работе [3]. Интерес к такой задаче был вдохновлен работой [2], в которой описывается эксперимент по расширению конденсата в ловушке с кольцевым потенциалом.

Математическая модель. Расширение конденсата в кольцевой ловушке описывается решением задачей Коши для нелокального уравнения Гросса-Питаевского вида

$$\left\{ -i\hbar\partial_t + V(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + \kappa \int_{\square^2} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |\Psi(\mathbf{y}, t)|^2 d\mathbf{y} \right\} \Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{p} = -i\hbar\partial_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, κ – параметр нелинейности. Функции $V(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и начальное условие выбирались следующими:

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}^2 - \exp\left[-\frac{(|\mathbf{x}|-1)^2}{0,25}\right], \quad W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{0,25\pi} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{0,25}\right],$$

$$\Psi(\mathbf{x}, 0) = N \cdot \exp\left[-\frac{(|\mathbf{x}|-1)^2}{\hbar}\right] \cdot \exp\left[-\frac{\sin^2(\varphi/2)}{0,16}\right], \quad \varphi = \arg(x_1 + i \cdot x_2). \quad (2)$$

Здесь N – нормировочный коэффициент (квадрат модуля волновой функции нормируется на единицу).

Квазиклассически сосредоточенными на многообразии Λ_t^1

$$\Lambda_t^1 = \{z = (\mathbf{p}, \mathbf{x}) = Z(s, t) = (\mathbf{P}(s, t), \mathbf{X}(s, t)) \mid s \in [0, 2\pi]\}, \quad t \in [0, T], \quad T > 0 \quad (3)$$

функциями называются функции, для которых существует предел

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \hat{A} \rangle = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle}{\|\Psi\|^2} = \int_0^{2\pi} \sigma(s) A(Z(s, t), t) ds, \quad (4)$$

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \int_{\Omega^2} \Psi^*(\mathbf{x}, t) \hat{A} \Psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad \|\Psi\|^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle.$$

Здесь $\sigma(s)$ – весовая функция, а \hat{A} – оператор с вейлевским символом $A(z, t)$. Функции $\mathbf{P}(s, t)$ и $\mathbf{X}(s, t)$ несут информацию об эволюции многообразия Λ_t^1 (3) и определяются системой Гамильтона-Эренфеста первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(s, t) = V_p(\mathbf{P}(s, t), \mathbf{X}(s, t)), \\ \dot{\mathbf{P}}(s, t) = -V_x(\mathbf{P}(s, t), \mathbf{X}(s, t)) - \tilde{\kappa} \int_0^{2\pi} \sigma(r) W_x(\mathbf{X}(s, t), \mathbf{X}(r, t)) dr, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\|\Psi\|^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Выбирая в качестве параметра многообразия в начальный момент времени $s = \varphi$, имеем следующие весовую функцию и начальные условия для системы (5), соответствующие начальному условию (2):

$$\mathbf{P}(s, 0) = (0, 0), \quad \mathbf{X}(s, 0) = (\cos s, \sin s), \quad \sigma(s) = \exp\left[-\frac{\sin^2(\varphi/2)}{0,08}\right].$$

Для оценки качества квазиклассического приближения были построены численные решения уравнения (1) и уравнения (5). Для иллюстрации решений (5) использовался набор точек на многообразии для разных s с шагом $\Delta s_i = 0,15/\sigma(s_i)$, чтобы плотность точек отображала плотность конденсата в квазиклассическом приближении в заданной точек многообразия. Для решения уравнения (1) использовался метод расщепления оператора Странга-Марчука и метод Кранка-Николсон. Решения уравнения (5) строились методом расщепления оператора Странга-Марчука и неявным методом средней точки. На рис. 1 и рис. 2 представлены графики плотности $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ и кривой $\mathbf{x} = \mathbf{X}(s, t)$ для $\kappa = 1$, $\hbar = 0,1$ (рис. 1) и $\hbar = 0,05$ (рис. 2).

Обсуждение результатов. Из рис. 1-2 видно, что решение системы Гамильтона-Эренфеста первого порядка дает хорошую оценку скорости расширения конденсата в кольцевой ловушке, причем при уменьшении параметра \hbar кривая $\mathbf{x} = \mathbf{X}(s, t)$ дает более точное описание локализации конденсата, что свидетельствует о квазиклассическом характере процесса. Таким образом, в квазиклассическом приближении заполнение конденсатом кольцевой ловушки можно описать решениями системы (5), не

решая само уравнение Гросса-Питаевского (1). В частности, решение системы (5) позволяет определить время, за которое он полностью заполняет ловушку. Стоит отметить, что оценка малого параметра \hbar по условиям эксперимента [2] дает даже меньшее значение, чем на рис. 2, которое было специально увеличено для большей наглядности рисунков, т.е. такое приближение представляет интерес с точки зрения физики. Отметим, что неинтегральная часть уравнения (5) хорошо линейаризуется в окрестности многообразия Λ_1^1 . При такой линейаризации или для квадратичной по своим аргументам функции $V(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ система (5) интегрируется в квадратурах.

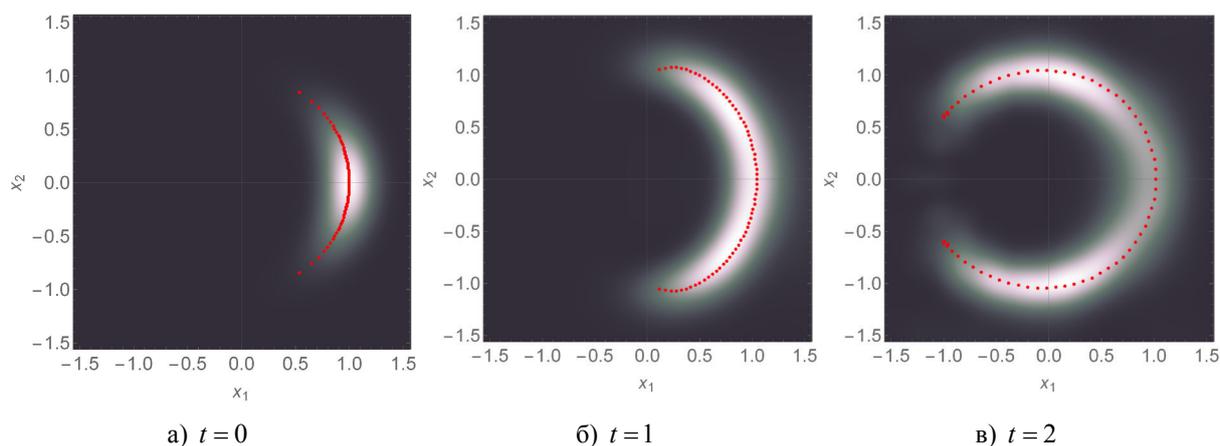


Рис. 1. График плотности $|\Psi(\mathbf{x},t)|^2$ и кривой $\mathbf{x} = \mathbf{X}(s,t)$ для разных t и $\hbar = 0,1$

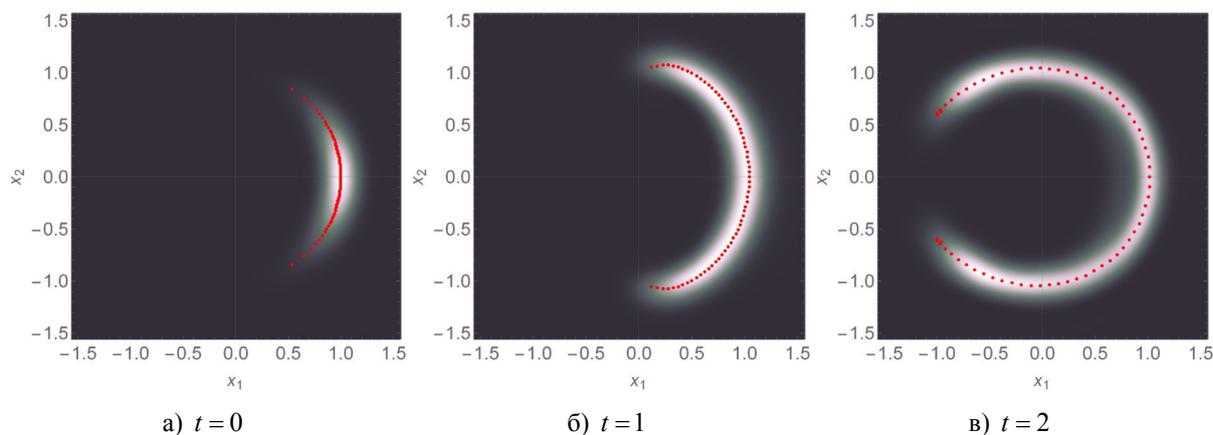


Рис. 2. График плотности $|\Psi(\mathbf{x},t)|^2$ и кривой $\mathbf{x} = \mathbf{X}(s,t)$ для разных t и $\hbar = 0,05$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19-41-700004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miesner H., Ketterle W. Bose-Einstein condensation in dilute atomic gases // Solid State Communications. – 1998. – V. 107, № 11. – pp. 629-637.
2. Bell T.A., Glidden J.A.P., Humbert L., Bromley M.W.J., Haine S.A., Davis M.J., Neely T.W., Baker M.A., Rubenzstein-Dunlop H. Bose-Einstein condensation in large time-averaged optical ring potentials // New Journal of Physics. – 2016. – V. 18, no. 3. – article 035003.
3. Shapovalov A.V., Kulagin A.E., Trifonov A.Yu. The Gross-Pitaevskii equation with a nonlocal interaction in a semiclassical approximation on a curve // Symmetry. – 2020. – V. 12, № 2. – article 201.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ
СТЕПЕННОЙ НАНОЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИД.С. Лоенко

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет
 Национальный исследовательский Томский государственный университет,
 Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
 E-mail: whiteink@bk.ru

MATHEMATICAL SIMULATION OF NATURAL CONVECTION OF POWER-LAW NANOFLUID
IN A CLOSED CAVITYD.S. Loenko

Scientific Supervisor: Prof., Dr. M.A. Sheremet
 Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
 E-mail: whiteink@bk.ru

Abstract. The paper is devoted to numerical analysis of transient natural convection of a non-Newtonian nanofluid in an enclosure under the influence of a local heater. The cooling system is modeled on the basis of heat pipes located on vertical walls, while the horizontal walls are considered to be thermally insulated. In this work, a nanofluid is a suspension of alumina nanoparticles and a mixture of water and multi-walled carbon nanotubes (1% MWCNT). The finite difference method has been used for calculations. Distributions of streamlines and isotherms as well as average Nusselt number have been studied for different values of governing parameters.

Постановка задачи. В работе проводится анализ нестационарных режимов естественной конвекции наножидкости в замкнутой квадратной полости при наличии локального плоского тепловыделяющего элемента (Рис. 1). Тепловыделение источника энергии, расположенного на нижней стенке, описывается постоянной плотностью теплового потока q . Система охлаждения моделируется на основе тепловых трубок, расположенных на вертикальных стенках, что способствует термостатированию поверхностей этих стенок с температурой T_c . Горизонтальные стенки считаются теплоизолированными. Следует отметить, что применение наножидкости позволяет оценить возможности включения малой концентрации твердых наночастиц в традиционный теплоноситель (вода, масло, этиленгликоль) с целью интенсификации тепломассопереноса [1, 2]. В настоящей работе наножидкость представляет собой суспензию наночастиц оксида алюминия и смеси воды и многостенных нанотрубок (1% MWCNT). Причем смесь воды и многостенных нанотрубок (1% MWCNT) считается базовой средой, в которую вводят наночастицы оксида алюминия.

При математическом описании транспортных процессов считается, что рассматриваемая наносуспензия является степенной жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска. Для описания неньютоновского характера течения применяется степенной закон Оствальда–де–Вилла $\tau_{ij} = 2\mu_{nf}D_{ij}$. Здесь $D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ – компоненты тензора скоростей деформации; u_i, u_j – компоненты вектора скорости, соответствующие координатам x_i, x_j ; μ_{nf} – эффективный коэффициент вязкости наносуспензии, который вычислялся на основе соотношения Бринкмана $\mu_{nf} = \mu_{bf}/(1-\phi)^{2,5}$,

где ϕ – объемная доля твердых наночастиц. При этом для определения эффективного коэффициента вязкости μ_f применялось соотношение вида: $\mu_{bf} = K(2D_{kl}D_{kl})^{\frac{n-1}{2}}$, где K – коэффициент густоты потока; n – показатель поведения жидкости. Для смеси воды и многостенных нанотрубок (1% MWCNT) имеем $K = 0,00135$ и $n = 0,963$ [3].

Основные уравнения. Для описания гидродинамики и теплопереноса в наножидкости используется однофазная модель с эффективными параметрами, которая в размерных переменных «скорость–давление» имеет следующий вид [4]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

$$\rho_{nf} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + g(\rho\beta)_{nf}(T - T_0)$$

$$(\rho c)_{nf} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_{nf} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

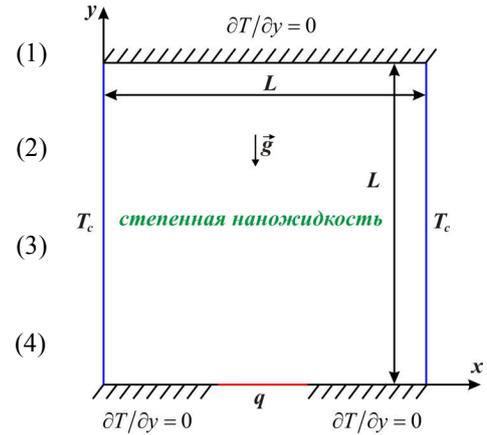


Рис. 1. Область решения задачи

Для вычисления физических характеристик наносuspension использовались следующие соотношения:

$$\rho_{nf} = \rho_{bf}(1 - \phi) + \rho_p \phi, \quad (\rho\beta)_{nf} = (\rho\beta)_{bf}(1 - \phi) + (\rho\beta)_p \phi, \quad (\rho c)_{nf} = (\rho c)_{bf}(1 - \phi) + (\rho c)_p \phi,$$

$$\frac{\lambda_{nf}}{\lambda_{bf}} = \frac{\lambda_s + 2\lambda_{bf} - 2\phi(\lambda_{bf} - \lambda_s)}{\lambda_s + 2\lambda_{bf} + \phi(\lambda_{bf} - \lambda_s)}$$

Для исключения поля давления из числа неизвестных параметров вводятся функция тока ψ ($u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$) и завихренность ω ($\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$). Данное преобразование позволяет сократить количество уравнений, что приводит к сокращению времени счета. В результате использования новых искомых функций и обезразмеривания, нестационарные дифференциальные уравнения примут вид [4]:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}} \frac{\rho_{bf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{Ra}{Pr} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left[\nabla^2 (\bar{M}\Omega) + S_\Omega \right] + \frac{(\rho\beta)_{nf}}{(\rho\beta)_{bf}} \frac{\rho_{bf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{\lambda_{nf}}{\lambda_{bf}} \frac{(\rho c)_{bf}}{(\rho c)_{nf}} \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (7)$$

Безразмерная вязкость \bar{M} и источниковый член S_Ω имеют вид:

$$\bar{M} = \left[4 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{и} \quad S_\Omega = 2 \left[\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial X^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \right].$$

Безразмерные комплексы для системы (5)–(7): число Рэлея – $Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\bar{\nu}a}$ и число Прандтля – $Pr = \frac{\bar{\nu}}{a}$.

Коэффициент эффективной кинетической вязкости определяется следующим образом:

$$\bar{\nu} = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{\frac{1}{(2-n)}} \cdot L^{\frac{2(1-n)}{(2-n)}}.$$

Начальные и граничные условия для сформулированной системы дифференциальных уравнений (5)–(7) в безразмерном виде выглядят следующим образом:

$$\tau = 0 \rightarrow \Psi = \Omega = 0, \Theta = 0;$$

$$\tau > 0 \rightarrow$$

$$X = 0 \text{ и } X = 1, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 0;$$

$$Y = 0, 0 \leq X \leq d/L \text{ и } d/L + \delta \leq X \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

$$Y = 0, d/L \leq X \leq d/L + \delta, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = -1;$$

$$Y = 1, 0 \leq X \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0.$$

В результате проведенных исследований установлены масштабы влияния интенсивности тепловыделения источника энергии, объемной доля наночастиц оксида алюминия, а также относительного размера нагревательного элемента на структуру течения и теплоперенос внутри полости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-79-20141).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sohel Murshed S.M., Nieto de Castro C.A. A critical review of traditional and emerging techniques and fluids for electronics cooling // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. – 2017. – Vol. 78. – P. 821–833.
2. Ahmadi M.H., Ghazvini M., Sadeghzadeh M., Nazari M.A., Ghalandari M. Utilization of hybrid nanofluids in solar energy applications: A review // *Nano-Structures & Nano-Objects*. – 2019. – Vol. 20. – P. 100386.
3. Sarlak A., Ahmadpour A., Hajmohammadi M.R. Thermal design improvement of a double-layered microchannel heat sink by using multi-walled carbon nanotube (MWCNT) nanofluids with non-Newtonian viscosity // *Applied Thermal Engineering*. – 2019. – Vol. 147. – P. 205–215.
4. Лоечко Д.С., Шеремет М.А. Конвективный теплоперенос степенной жидкости в полости с источником энергии нестационарного объемного тепловыделения // *Вестник Пермского университета. Физика*. – 2019. – № 4. – С. 44–50.

**ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЕСТЕСТВЕННУЮ КОНВЕКЦИЮ
ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛОСТИ С ТЕПЛОПРОВОДНЫМИ СТЕНКАМИ
И ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ**

С.А. Михайленко

Научный руководитель: доцент, д.ф.-м.н. М.А. Шеремет
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: stepanmihaylenko@gmail.com

**EFFECT OF SURFACE RADIATION ON NATURAL CONVECTION IN A ROTATING CAVITY
WITH HEAT-CONDUCTING WALLS AND HEAT-GENERATING ELEMENT**

S.A. Mikhailenko

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. M.A. Sheremet
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: stepanmihaylenko@gmail.com

***Abstract.** A study of convective-radiative heat transfer inside a rotating square cavity with heat-conducting walls under the effect of variable volumetric heat-generation of local element has been carried out. Vertical walls of the cavity are cooled, while horizontal walls are insulated. The cavity rotates counterclockwise at a constant angular velocity. Governing equations has been solved by the finite difference method. The effect of surface emissivity on heat and mass transfer has been studied.*

Введение. Исследование конвективно-радиационного теплообмена необходимо для решения многих технических задач, в частности, для разработки новых подходов к охлаждению элементов электронной аппаратуры. В некоторых областях, например, в космической промышленности или спутниковых системах, часто встречается электроника, участвующая во вращении [1]. Расчетная область, изображенная на рисунке 1, представляет собой модель элемента электронной аппаратуры в корпусе. Имеется квадратная полость высоты H с теплопроводными стенками толщиной l , которая вращается с постоянной угловой скоростью ξ_0 . Горизонтальные стенки теплоизолированные, вертикальные стенки поддерживаются при постоянной температуре T_c , а на нижней стенке находится источник переменного объемного тепловыделения Q . Все поверхности внутри полости являются отражателями и излучателями радиационной тепловой энергии. Воздух, заполняющий полость, прозрачен для излучения.

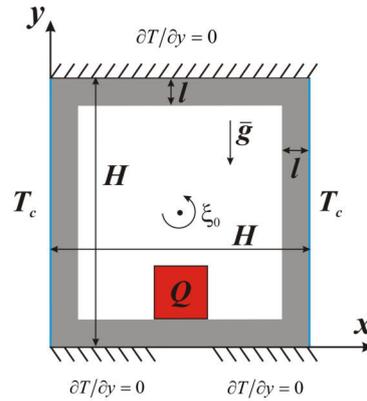


Рис. 1. Область решения задачи

Уравнения и методы. Система управляющих уравнений, записанных в безразмерных переменных «функция тока–завихренность», выглядит следующим образом:

- внутри полости

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \frac{Ra}{Pr \cdot Ta} \left[\frac{\partial \theta_f}{\partial x} \cos(\tau) - \frac{\partial \theta_f}{\partial y} \sin(\tau) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr \cdot \sqrt{Ta}} \left(\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

- в стенках

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \frac{\alpha_w / \alpha_f}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

- в источнике энергии

$$\frac{\partial \theta_{hs}}{\partial \tau} = \frac{\alpha_{hs} / \alpha_f}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta_{hs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_{hs}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \{1 - \sin(f\tau)\} \right) \quad (5)$$

Здесь Ra – число Рэлея; Pr – число Прандтля; Ta – число Тейлора; α_f , α_w , α_{hs} – коэффициент теплопроводности воздуха, стенок и источника, соответственно; θ_f , θ_w , θ_{hs} – безразмерная температура воздуха, стенок и источника, соответственно; ψ – безразмерная функция тока; ω – безразмерная завихренность; x , y – безразмерные координаты; u , v – безразмерные проекции скорости; τ – безразмерное время; f – частота нагрева.

Начальные и граничные условия:

$$\tau = 0: \quad \psi = \omega = \theta = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq 1$$

$$\tau > 0:$$

$$\psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \theta_w = 0 \quad \text{при } x = 0, 1 \text{ и } 0 \leq y \leq 1$$

$$\psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \theta_w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, 1 \text{ и } 0 < x < 1$$

$$\psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}, \quad \begin{cases} \theta_{hs} = \theta_f \\ \lambda_{hs} \frac{\partial \theta_{hs}}{\partial n} = \frac{\partial \theta_f}{\partial n} - N_{\text{rad}} Q_{\text{rad}} \end{cases} \quad \text{на поверхности источника}$$

$$\psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}, \quad \begin{cases} \theta_w = \theta_f \\ \lambda_w \frac{\partial \theta_w}{\partial n} = \frac{\partial \theta_f}{\partial n} - N_{\text{rad}} Q_{\text{rad}} \end{cases} \quad \text{на внутренней поверхности стенок}$$

где Q_{rad} - безразмерный тепловой поток, N_{rad} - радиационное число. С методами решения можно ознакомиться более подробно в работе [2]. Интенсивность теплообмена определяется с помощью средних конвективного и радиационного чисел Нуссельта:

$$\overline{Nu}_{\text{con}} = -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial \theta}{\partial n} d\zeta, \quad \overline{Nu}_{\text{rad}} = \frac{N_{\text{rad}}}{l} \int_0^l \frac{\partial Q_{\text{rad}}}{\partial n} d\zeta.$$

Результаты и выводы. Результаты получены для следующих значений определяющих параметров: $Ra=10^5$, $Pr=0,7$, $Ta=10^4$, $f=0,1$ и $0 < \varepsilon < 0,9$.

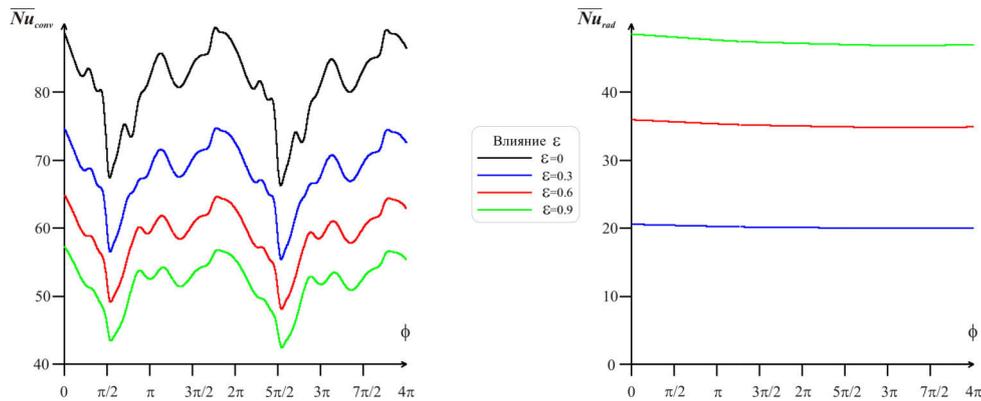


Рис. 2. Влияние коэффициента излучения на средние конвективный и радиационный числа Нуссельта

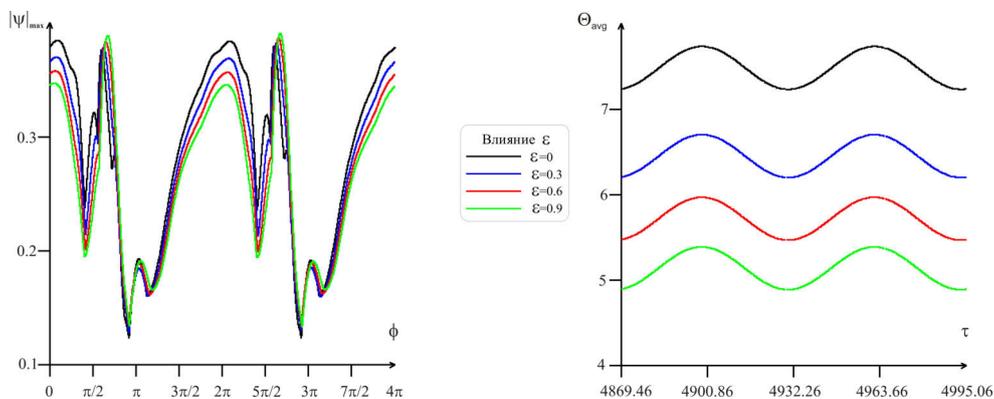


Рис. 3. Влияние коэффициента излучения на интенсивность течения и среднюю температуру в источнике

На рисунке 2 изображено изменение средних конвективного и радиационного чисел Нуссельта в течение двух полных оборотов полости для различных значений коэффициента излучения. Стоит отметить, что полость совершила достаточное количество оборотов, и все проходящие в полости процессы имеют периодический характер, что можно увидеть в изменении среднего Nu_{conv} . При увеличении коэффициента излучения наблюдается снижение конвективного теплообмена, но общий теплообмен повышается за счет роста радиационной составляющей.

На рисунке 3 изображено изменение интенсивности гидродинамики в течение двух оборотов полости и средней температуры в источнике в течение двух периодов нагрева. При повышении коэффициента излучения наблюдается снижение интенсивности течения. В тоже время, за счет радиационного теплообмена, средняя температура в источнике снижается. Таким образом, правильный подбор коэффициента излучения позволяет интенсифицировать охлаждение элемента электронной аппаратуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МД-821.2019.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sumanta Banerjee, Achintya Mukhopadhyay, Swarnendu Sen, Ranjan Ganguly (2009). Thermomagnetic convection in square and shallow enclosures for electronics cooling. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, no. 55(10), pp. 931-951.
2. Mikhailenko, S.A., Sheremet, M.A., Mohamad, A.A. (2018). Convective-radiative heat transfer in a rotating square cavity with local heat-generating source. Int. Journal of Mech Sci, no. 142-143, pp. 530-540.

**ОЦЕНКА ЭМОЦИОНАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЧЕЛОВЕКА МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО
ДИСКРИМИНАНТНОГО АНАЛИЗА**

Нгуен Данг Куанг, Чан Зюй Хынг, Чу Нгок Хай

Научный руководитель: профессор, д.т.н. Д.К. Авдеева

Военно-Промышленный Колледж

Вьетнам, провинция Фу Тхо, ул. ТханьВинь, 20, 35912

E-mail: kqh1215@mail.ru

ASSESSMENT EMOTIONAL STATE OF A PERSON BY LINEAR DISCRIMINANT ANALYSIS

Nguyen Dang Quang, Tran Duy Hung, Chu Ngoc Hai

Scientific Supervisor: Prof., Dr. D.K. Avdeeva

Military Industrial College, Viet Nam, Phu Tho Province, District Thanh Vinh, 20, 35912

***Abstract.** In the present study, we classify emotional state into two groups: normal state and stressful state, according to the parameters of registered signals by developed hardware-software complex, based on the linear discriminant analysis (LDA) method. The registered signals are electrocardiography (ECG), electroencephalography (EEG), galvanic skin response (GSR). Method LDA is widely used in biomedical research, and in the problems of diagnosing diseases.*

Введение. Стресс как массовое явление ментального состояния широко распространен в различных странах. Ему подвержена значительная часть населения в различных странах. Например, по одному из исследований в США данная часть населения составляет 40%, в Японии – 60%, Австралии – 35%, а во Франции 40% [1]. В год по статистике, приведенной в [2] на ликвидацию последствий стресса в США расходуется 190 миллиардов долларов, а в странах Евросоюза – 20 миллиардов евро. Изучение теоретической литературы показало, что необходимо создание новых устройств и внедрение новых методов для определения и анализа стресса человека. В данной статье предложена математическая модель классификации эмоционального состояния на 2 группы по параметрам зарегистрированных сигналов разработанными аппаратно-программными комплексами (АПК), основанную на методе линейного дискриминантного анализа (ЛДА).

Поставку задачи: Целью эксперимента является классификация эмоционального состояния на нейтральное и стрессовое, вызывающее заметное отклонение от обычного состояния (стресс) у исследуемого. При этом регистрируются электрофизиологические сигналы (реакции) при ответах на нейтральные и стрессирующие вопросы, которые заранее заготовлены. Электрофизиологическим сигналом являются электрокардиография (ЭКГ), электроэнцефалография (ЭЭГ), определение кожно-гальванической реакции (КГР). Имеется также набор контрольных вопросов. Для данной работы наиболее подходит метод линейного дискриминантного анализа Фишера [3, 4]. Линейный дискриминантный анализ требует выполнения ряда предположений. Вектор наблюдений $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$ должен относиться к одному из двух классов, имеющих многомерные нормальные распределения с различными математическими ожиданиями и одинаковыми матрицами ковариации.

Пусть X матрица наблюдений для нейтральных и стрессорирующих вопросов. Столбцы данной матрицы содержат реакции, как на нейтральные, так и на стрессорирующие вопросы.

$$X(p, m+n) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pm+n} \end{pmatrix}$$

где m – количество нейтральных вопросов; n – количество стрессорирующих вопросов; p – количество параметров; x_{ij} значения параметров в i -ой строке и j -ой столбце. Имеется набор параметров, таких как изменение ЧСС, время реакции КГР, размах импульсов КГР, длительность импульсов ЭЭГ и т.д.

Первым шагом обработки данных является их нормировка, чтобы все значения были положительными. Нормировка выполняется по формуле $x_{ij}^h = \frac{(x_{ij} - x_{i\min})}{(x_{i\max} - x_{i\min})}$. Здесь $x_{i\min}, x_{i\max}$ – минимальные и максимальные значения параметров в i -ой строке. Далее индекс « h » будем опускать. Разобьем матрицу $X(p, m+n)$ на две матрицы, содержащие реакции на нейтральные и стрессорирующие вопросы соответственно.

$$X(p, m) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pm} \end{pmatrix}; Y(p, n) = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{p1} & \cdots & y_{pn} \end{pmatrix}$$

Создаем две матрицы, содержащие среднее значение:

$$M_X = \begin{pmatrix} \mu_{x_1} \\ \vdots \\ \mu_{x_p} \end{pmatrix}; M_Y = \begin{pmatrix} \mu_{y_1} \\ \vdots \\ \mu_{y_p} \end{pmatrix},$$

где,

$$\mu_{x_i} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m x_{ij}; \mu_{y_i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij}$$

Вычисляем выборочные ковариационные матрицы:

$$C_X = \frac{(X - M_X) \cdot (X - M_X)^T}{m-1}; C_Y = \frac{(Y - M_Y) \cdot (Y - M_Y)^T}{n-1}$$

После этого определим объединенную ковариационную матрицу C_{XY} следующим образом:

$$C_{XY} = \frac{(m-1) \cdot C_X + (n-1) \cdot C_Y}{m+n-2}$$

Коэффициенты дискриминантной функции определяются по формуле: $\vec{a} = (C_{XY})^{-1} \cdot (M_X - M_Y)$, где $(C_{XY})^{-1}$ – обратная матрица C_{XY} . Определяем значение дискриминантных функции нейтрального и стрессорирующего класса соответственно:

$$f_1 = (a^T \cdot X)^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_i \cdot x_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p a_i \cdot x_{im} \end{pmatrix}; f_2 = (a^T \cdot Y)^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_i \cdot y_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p a_i \cdot y_{in} \end{pmatrix}$$

Константа дискриминации вычисляется по формуле: $C = \frac{1}{2} \cdot (f_{1m} + f_{2m})$, где f_{1m}, f_{2m} – значение средней дискриминантной функции нейтрального и стрессирующего класса, определяется по формуле:

$$f_{1m} = a^T \cdot M_X = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^k a_i \cdot \sum_{j=1}^m x_{ij}; f_{2m} = a^T \cdot M_Y = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k a_i \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij}$$

Результаты. После получения константы дискриминации можно провести классификацию новых объектов (контрольные классы). Пусть матрица $Z(p, k)$ содержит параметры контрольных вопросов, k – количество контрольных вопросов. Для того чтобы отнести эти вопросы к одному из двух классов, рассчитаем для них значения дискриминантных функций по формуле: $f_z = (a^T \cdot Z)^T$.

Если $f_{z_j} \geq C$ (j меняется от 1 до k), то неизвестный j -порядковый вопрос в матрице Z принадлежит к нейтральному классу. Аналогично, если $f_{z_j} < C$ то, неизвестный вопрос в матрице Z принадлежит к стрессирующему классу. Данный алгоритм был реализован в программном пакете Matlab. Пример результата обработки представлен на рисунке 1:

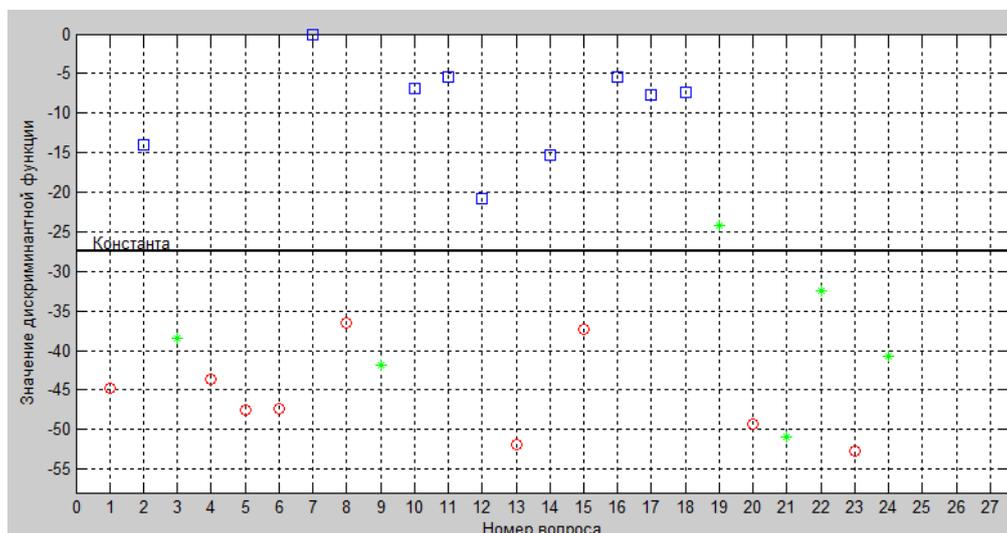


Рис. 1. Распределение вопросов на группы, исследуемый №4, где □ – нейтральные классы, ○ – стрессирующие классы, * – контрольные классы

Закключение. В ходе исследования была получена классификация эмоционального состояния человека на нейтральные и стрессирующие классы методом линейного дискриминантного анализа. Установлено, что данный метод широко используется в биомедицинских исследованиях, в частности, в задачах диагностики заболеваний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Six New Stress Statistics from around the World [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://thebusylifestyle.com/stress-statistics-worldwide/#>
2. Depression [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs369/en/>
3. Аффифи, А. Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ / А. Аффифи, С. Эйзен. – М.: Мир, 1982. – 488 с.
4. Урбах, В.Ю. Статистический анализ в биологических и медицинских исследованиях / В.Ю. Урбах. – М.: Медицина, 1975. – 294 с.

**К СОЗДАНИЮ ПРИКЛАДНОЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИАГНОСТИКИ
КОГНИТИВНОЙ И ЭМОЦИОНАЛЬНО-ВОЛЕВОЙ СФЕРЫ ПОСТИНСУЛЬТНЫХ
ПАЦИЕНТОВ НА РАЗНЫХ ЭТАПАХ ВОССТАНОВИТЕЛЬНОГО ЛЕЧЕНИЯ**

В.Б. Обуховская^{1,2}, Д.Г. Назметдинова¹

Научный руководитель: профессор, д.т.н. А.Е. Янковская¹

¹Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

²Сибирский государственный медицинский университет,

Россия, г. Томск, Московский тракт, 2, 634050

E-mail: diada1991@gmail.com

**TO THE CREATION OF APPLIED INTELLIGENT SYSTEM OF DIAGNOSTICS OF COGNITIVE
AND EMOTIONAL-VOLITIONAL SPHERE OF POST-STROKE PATIENTS ON DIFFERENT
STAGES OF REHABILITATION TREATMENT**

Obukhovskaya V.B.^{1,2}, Nazmetdinova D.G.¹

Scientific Supervisor: Prof., Dr. of Science A.E. Yankovskaya¹

¹Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

²Siberian Medical University, Russia, Tomsk, Moskovskiy tr., 2, 634050

E-mail: diada1991@gmail.com

***Abstract.** The publication is devoted to the creation of an applied intelligent diagnostic system of the cognitive and emotional-volitional sphere of post-stroke patients on different stages of rehabilitation treatment (IS DICEV). The applied IS DICEV is constructed on the basis of the intelligent instrumental tool IMSLOG and is based on test methods of the pattern recognition, fault-tolerant mixed diagnostic tests. The application of the applied IS DICEV will allow: to reveal various kinds of regularities in the cognitive and emotional-volitional sphere of post-stroke patients; make diagnostic decisions and justify them using graphical, including cognitive, tools. The above mentioned is of great importance for tracking the dynamics of rehabilitation treatment.*

Введение. Настоятельная необходимость создания интеллектуальных систем (ИС) в области медицины, психологии, биологии, экибиомедицины и ряда других областей не вызывает сомнения. Актуальность создания прикладной ИС диагностики когнитивной и эмоционально-волевой сфер постинсультных пациентов (ДИКЭВ) обусловлена снижением качества жизни, высокими эпидемиологическими показателями сосудистой патологии головного мозга, увеличением инвалидности, а также наличием тенденции к росту показателя смертности от сосудистой патологии (в России один из самых высоких в мире) [1].

Постинсультные и сопутствующие когнитивные и эмоционально-волевые нарушения на настоящий момент являются одними из социально-значимых проблем, поскольку около 450 000 человек ежегодно переносят инсульт и только 20% сохраняют трудоспособность, 80% – утрачивают её, причем 60% нуждаются в постоянном уходе [2]. Особенно актуальна разработка прикладной ИС диагностики в связи с тем, что большинство людей не в полной мере осознает последствия инсульта, связанные с

нарушением когнитивного статуса, эмоциональной и волевой сферы. Настоятельная необходимость своевременного и быстрого принятия диагностических решений, а также обоснования этих решений с использованием графических, включая когнитивные, средств, определяет целесообразность применения ИС не только для диагностики, но и для определения динамики вышеперечисленных сфер пациентов на разных этапах восстановительного лечения.

Матричное представление данных и знаний в прикладной ИС ДИКЭВ. Прикладная ИС ДИКЭВ, также как и ряд других разрабатываемых нами интеллектуальных систем, основана на матричной модели представления данных и знаний, включающей целочисленную матрицу описаний Q и матрицу различений R [3] диагностического типа, в целях построения которых проведена нами структуризация данных и знаний. Строки матрицы Q сопоставлены обучающим объектам (пациентам с диагнозом ишемический инсульт в раннем восстановительном периоде и с последствиями ишемического инсульта). Столбцы матрицы Q сопоставлены характеристическим признакам (ХП) когнитивной и эмоционально-волевой сфер.

Элемент q_{ij} матрицы Q задает значение j -го признака для i -го объекта. Если значение признака несущественно для объекта, то данный факт отмечается прочерком ("–") в соответствующем элементе матрицы Q . Для каждого признака z_j ($j=\{1,2,\dots, m\}$) задается либо интервалы изменения его значений, либо целочисленное значение. Строки матрицы R сопоставлены строкам матрицы Q , столбцы – классификационным признакам (КП), разбивающим обучающие объекты на классы эквивалентности [4]. Множество всех неповторяющихся строк матрицы различений сопоставлено множеству выделенных образов, представленных однострочковой матрицей R' , элементами которой являются номера образов. Отметим, что данная модель позволяет представлять не только данные, но и знания экспертов, поскольку одной строкой матрицы Q можно задавать в интервальной форме (с использованием значения прочерк "–") подмножество объектов, для которых характерно одно и то же итоговое решение, задаваемое соответствующей строкой матрицы R . Заметим, что матрица Q добавляется столбцами, сопоставленными идентификационным признакам пациента (Ф.И.О., возраст, пол, образовательный статус, должность).

Согласно вышеприведенной матричной модели представления данных и знаний осуществлена структуризация данных и знаний в области клинической психологии. Строки матрицы Q представляют собой различные комбинации значений целочисленных ХП. В число ХП входят ХП: z_1-z_{10} – количество правильно воспроизведенных слов в каждом предъявлении (10 признаков), $z_{11}-z_{21}$ – количество воспроизведенных слов спустя заданный временной интервал (10 признаков), $z_{22}-z_{47}$ – нахождение объектов в нужном порядке (25 признаков), $z_{48}-z_{55}$ – внутри личностный фактор восстановления (7 признаков), $z_{56}-z_{73}$ – межличностный фактор восстановления (7 признаков), $z_{74}-z_{77}$ – контрольный фактор восстановления (3 признаков), $z_{78}-z_{85}$ – признаки тревоги (7 признаков), $z_{86}-z_{93}$ – признаки депрессии (7 признаков).

Для матрицы R диагностического типа определены 7 классификационных признаков: 1-ый КП – объем кратковременной памяти (3 значения: 1 – низкий; 2 – средний; 3 – высокий); 2-ой КП – объем долговременной памяти (3 значения: 1 – низкий; 2 – средний; 3 – высокий); 3-ий КП – объем внимания (3 значения: 1 – низкий; 2 – средний; 3 – высокий); 4-ый КП – распределение внимания (3 значения: 1 – низкое; 2 – среднее; 3 – высокое); 5-ый КП – переключаемость внимания (3 значения: 1 – низкая; 2 – средняя; 3 – высокая); 6-ой КП – мотивация пациента на выздоровление (2 значения: 1 – внутриличностная; 2 – межличностная); 7-ой КП – показатель тревоги и депрессии (3 значения:

1 – отсутствие достоверно выраженных симптомов тревоги и депрессии; 2 – субклинически выраженная тревога / депрессия; 3 – клинически выраженная тревога / депрессия).

Количество строк матрицы Q равно 1000 (с учетом, что не все сочетания возможны) – размеру обучающей выборки. Количество столбцов матрицы Q равно 93 (без учета идентификационных признаков пациента). Количество строк матрицы R равно 1000, а количество столбцов равно 7.

Поскольку рамки доклада ограничены, приведём иллюстративный пример матричного представления данных и знаний (рисунок 1).

$$Q = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} & z_{11} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 2 & 3 & 2 & 7 & 8 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 3 & 2 & 4 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & - & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 6 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 6 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 5 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$R = \begin{matrix} & k_1 & k_2 \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$R' = \begin{matrix} & k_1 & k_2 \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

Рис. 1. Матричное представление данных и знаний

Распознаваемый (исследуемый) субъект представляется совокупностью значений характеристических признаков. База данных и знаний будет создана на основе результатов исследования 1000 пациентов с диагнозом ишемический инсульт в раннем восстановительном периоде и с последствиями ишемического инсульта, находящийся на лечении в клиниках неврологического профиля.

Краткое описание математических основ прикладной ИС ДИКЭВ. Прикладная ИС ДИКЭВ основана на математическом аппарате выявления различного рода закономерностей, логико-комбинаторных тестовых методах распознавания образов, принятия и обоснования решений с применением средств когнитивной графики. В прикладной ИС ДИКЭВ используется диагностическая схема клинико-психологических опросников, направленных на диагностику особенностей когнитивной сферы, позволяющих оценить объем кратковременной и долговременной слухоречевой памяти, объем, распределение и переключаемость внимания в соответствии с динамикой их уровня проявления (низкий, высокий, средний); а также на диагностику особенностей эмоционально-волевой сферы, направленных на оценку мотивации на выздоровление и признаков тревоги и депрессии. Анализ значений признаков позволит определять динамику состояния пациентов на разных этапах восстановительного лечения.

Учет степени усиления (выраженности) симптомов (признаков) существенно влияет на результат принятия достоверных решений. Такая детализация позволяет сделать диагностику более точной и дать качественную интерпретацию состояния обследуемого в динамике.

Прикладная ИС ДИКЭВ реализует следующие функции: ввод анкетных данных об обследуемом; извлечение признаков с целью выявления особенностей когнитивной и эмоционально-волевой сфер на различных этапах восстановительного лечения, а также принятие итоговых диагностических решений и их обоснование с применением средств когнитивной графики, формирование заключения по диагностическим решениям. Анализируя полученные результаты, система диагностирует наличие основных показателей когнитивной и эмоционально-волевой сфер, а также выявляет существующие дефициты. Предложено использовать то или иное количество ХП, соответствующее

особенностям когнитивной и эмоционально-волевой сфер, отсутствие или низкие показатели которых свидетельствуют о том, что у обследуемого присутствуют нарушения (дефицит).

Предлагается осуществить конструирование прикладной ИС ДИКЭВ на базе интеллектуального инструментального средства ИМСЛОГ [4], в которой взаимодействие с пользователем организовано в виде интеллектуального интерфейса с применением средств когнитивной графики на этапе ввода анкетных данных об обследуемом и при извлечении значений признаков по диагностике когнитивной и эмоционально-волевой сфер с целью выявления дефицита, а также на этапах обоснования диагностических решений, вывода с применением средств когнитивной графики и формирования заключения по диагностическим решениям.

Заключение. Впервые предложена матричная модель представления данных и знаний в области реабилитации постинсультных пациентов и проведена оригинальная структуризация данных и знаний. Для принятия и обоснования решений предложено использование конструируемой на базе интеллектуального инструментального средства ИМСЛОГ прикладной ИС ДИКЭВ, целесообразность применения которой в практическом здравоохранении обусловлена необходимостью качественно, быстро и своевременно принимать диагностические решения, обосновывать эти решения с использованием графических, включая когнитивные, средств. Прикладная ИС ДИКЭВ позволит диагностировать признаки постинсультных нарушений на основе упрощенных критериев диагностики, а также оценить динамику признаков на разных этапах восстановительного лечения.

Будучи реализованной прикладная ИС ДИКЭВ обеспечит достоверность и качество результатов, экономичность затрат временных и человеческих ресурсов; позволит своевременно определять и снабжать специалиста информацией о состоянии и особенностях когнитивной и эмоционально-волевой сфер постинсультных пациентов на разных этапах восстановительного лечения. Включение прикладной ИС ДИКЭВ в геоинформационные системы (ГИС) позволит существенно расширить их возможности. Исследование ИС будет осуществлено на базе клиник неврологического профиля. Дальнейшие исследования предполагают включение математического аппарата нечеткой и пороговой логики с целью расширения возможностей прикладной ИС ДИКЭВ.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (№ 18-013-00937а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atlas: country resources for neurological disorders – 2nd ed. Geneva: World Health Organization, 2017. – No. 2. – 74 p.
2. Ковальчук В.В., Богатырева М.Д., Миннуллин Т.И. Современные аспекты реабилитации больных, перенесших инсульт // Журнал неврологии и психиатрии им. С.С. Корсакова. – 2014. № 6. – С. 101-105.
3. Янковская А.Е. Логические тесты и средства когнитивной графики // Издательский Дом: LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2011. – 92 с.
4. Yankovskaya A.E., Gedike A.I., Ametov R.V., Bleikher A.M. IMSLOG-2002 Software Tool for Supporting Information Technologies of Test Pattern Recognition // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2003. – Vol. 13. – No. 2. – pp. 243-246.

АДАПТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

М.А. Повзун

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Е.А. Пчелинцев
 Национальный исследовательский Томский государственный университет,
 Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
 E-mail: povzunyasha@gmail.com

ADAPTIVE ESTIMATION IN NONPARAMETRIC AUTOREGRESSIVE

M.A. Povzun

Scientific Supervisor: PhD. E.A. Pchelintsev
 Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
 E-mail: povzunyasha@gmail.com

Abstract. In this paper we consider an adaptive estimation problem in the nonparametric autoregression. We develop a new model selection method, using improved estimation. This procedure is based on the sequential estimators. For quadratic risk of proposed estimate we obtain sharp oracle inequality that allows us to establish the efficiency property of the model selection procedure.

Введение. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ наблюдаемый временной ряд $(y_k)_{k \geq 1}$ удовлетворяет уравнению непараметрической авторегрессии вида

$$y_k = S(t_k)y_{k-1} + \varepsilon_k, \quad t_k = \frac{k}{n}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1)$$

где $S(t) \in L_2[0,1]$ - неизвестная функция, $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ - последовательность одинаково распределенных случайных величин таких, что $\mathbf{E}(\varepsilon_k) = 0$, $\mathbf{E}(\varepsilon_k^2) = 1$, начальное значение y_0 - фиксированная величина.

Задача - построить адаптивную процедуру выбора модели для оценивания неизвестной функции S по наблюдениям $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$, которая имеет более высокую среднеквадратическую точность по сравнению с оценками наименьших квадратов (МНК) для любого конечного объема наблюдений. Задача адаптивного оценивания возникает из-за отсутствия информации о гладкости неизвестной функции.

Процессы авторегрессии имеют широкое применение при моделировании реальных временных рядов, поэтому актуальной является проблема статистической идентификации для таких моделей [1].

Качество оценивания функции S будем измерять среднеквадратическим риском

$$R_p(\hat{S}, S) := \mathbf{E}_{p,S} \|\hat{S} - S\|^2 \quad \text{и} \quad \|S\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S^2(x_k), \quad (2)$$

где \hat{S} - некоторая оценка (измеримая функция от наблюдений), $\mathbf{E}_{p,S}$ - математическое ожидание относительно распределения наблюдений $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$ с плотностью p и фиксированной функцией S .

Улучшенные оценки МНК. Для адаптивного неасимптотического оценивания неизвестной функции S применим подход из [2]. Для этого, используя последовательный метод усеченного оценивания, перейдем от модели (1) к ее аппроксимации регрессионной моделью. В каждой точке

$(x_i)_{1 \leq i \leq m}$, $m = [\sqrt{n}]$, разбиения отрезка $[0,1]$ определим последовательный план (τ_i, \tilde{S}_i) с моментом остановки τ_i и оценкой \tilde{S}_i , определенными в [1]. Тогда на некотором множестве $B_n \subseteq \Omega$ таком, что $n^\alpha P_{p,S}(\bar{B}_n) \rightarrow 0$ для любого $\alpha > 0$ при неограниченном возрастании n , приходим к уравнению регрессии

$$Y_i = S(z_i) + \xi_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (3)$$

$$Y_i = \tilde{S}_i(x_i)1_{B_n}, \quad \xi_i = \eta_i + \varpi_i,$$

где $(\eta_i)_{1 \leq i \leq m}$ - последовательность некоррелированных случайных величин и $(\varpi_i)_{1 \leq i \leq m}$ - последовательность ограниченных случайных величин, связанных определенным образом с последовательностью $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$. Теперь оценим функцию S в уравнении (3). Воспользуемся ее разложением Фурье по тригонометрическому базису $(\phi_j)_{j \geq 1}$:

$$S(x) = \sum_{j=1}^m \theta_j \phi_j(x), \quad \theta_j = (S, \phi_j)_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(x_i) \phi_j(x_i).$$

Для оценивания функции S , необходимо оценить коэффициенты Фурье. Вместо классических оценок МНК, определим сжимающие оценки

$$\theta_{j,n}^* = (1 - g(j)) \hat{\theta}_{j,n}, \quad g(j) = \frac{c_n}{|\hat{\theta}_n|_d} 1_{\{1 \leq j \leq d\}}, \quad \hat{\theta}_{j,n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i \phi_j(x_i),$$

где $c_n = c_n(d)$ - известная константа [3], $|\cdot|_d$ - евклидова норма в \mathbf{R}^d , $2 \leq d = 2 + [\ln n] \leq m$.

Определим класс взвешенных сжимающих оценок МНК функции S для всех $0 \leq t \leq 1$ в следующем виде:

$$S_\lambda^*(t) = \sum_{i=1}^m S_\lambda^*(x_i) 1_{\{x_{i-1} < t \leq x_i\}}, \quad S_\lambda^*(x_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \theta_{j,n}^* \phi_j(x_i) 1_{B_n}, \quad (4)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d, \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_m)$ - вектор весовых коэффициентов, который принадлежит конечному множеству $\Lambda \subset [0,1]^m$. Данная оценка обладает более высокой среднеквадратической точностью по сравнению с взвешенной оценкой МНК, поэтому ее называют улучшенной. При этом установлено [3], что минимальный выигрыш в точности равен c_n^2 .

Метод выбора модели. Далее, из семейства оценок (4) требуется выбрать наилучшую (в смысле оракульного неравенства) оценку. С этой целью определим платежную функцию

$$J(\lambda) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \theta_{j,n}^{*2} - 2 \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{\theta}_{j,n} + \delta P_m(\lambda),$$

где $\bar{\theta}_{j,n} = \theta_{j,n}^* \hat{\theta}_{j,n} - \frac{1}{m} s_{j,m}$, $P_m(\lambda) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 s_{j,m}$, $s_{j,m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \phi_j^2(x_i) \mathbf{E}_{p,S} \eta_i$ и $0 < \delta < 1$. Полагая

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} J_n(\lambda),$$

приходим к процедуре выбора модели

$$S^* = S_{\lambda^*}^*. \quad (5)$$

Предложенная процедура выбора модели является оптимальной в следующем смысле.

Теорема. Пусть наблюдения описываются уравнением (1). Тогда для любых $n \geq 1$, $1 < \delta < 1/3$ и распределения p среднеквадратический риск (2) предложенной процедуры выбора модели (5) удовлетворяет следующему точному оракульному неравенству

$$R_p(S^*, S) \leq \frac{1-\delta}{1-2\delta} \min_{\lambda \in \Lambda} R_p(S_\lambda^*, S) + \frac{1}{\delta n} h_n,$$

где остаточное слагаемое h_n такое, что для любого $a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{n^a} = 0.$$

Численное моделирование. Далее рассмотрим результаты численного сравнения эмпирических среднеквадратических рисков предложенной улучшенной оценки и оценки МНК. Моделирование проводилось в среде MATLAB. Предположим, что в модели (1) функция S определена на отрезке $[0,1]$ и имеет следующий вид $S(t) = t \cos(2\pi t) + t^2(1-t) \cos(2\pi t)$, а шум $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ - независимые одинаково распределённые случайные величины из стандартного нормального распределения. Для вычисления процедуры выбора модели (5) параметр $\delta = (3 + \ln 2)^{-2}$. Эмпирические среднеквадратические риски рассчитываются по приближенной формуле

$$\mathcal{R}(S^*, S); \quad \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \|S_l^* - S\|_n^2, \quad (6)$$

где S_l^* - оценка, вычисленная по l -ой реализации выборки. При этом $N=1000$. Результаты приведены в Таблице 1.

Таблица 1

Эмпирические среднеквадратические риски предложенной оценки и оценки МНК функции S

n	50	100	500	1000
$\tilde{R}(S^*, S)$	2,6878	1,0179	0,2099	0,0675
$\tilde{R}(\hat{S}, S)$	6,1569	3,5897	1,7896	0,9481
$\tilde{R}(S^*, S) / \tilde{R}(\hat{S}, S)$	2,3	3,5	8,5	14,0

Видно, что риск предложенной процедуры меньше, чем для процедуры, которая основана на методе наименьших квадратов. При этом точность оценивания в разы лучше. Также, отметим, что риски с ростом n стремятся к нулю, т.е. улучшенный подход для процедуры выбора модели следует использовать для ограниченного числа наблюдений.

Работа выполнена при поддержке Гранта Президента Российской Федерации, проект № МК-834.2020.9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arkoun O., Brua J.-Y., Pergamenschikov S. Sequential Model Selection Method for Nonparametric Autoregression. Sequential Analysis. – 2019. – Vol.18, Issue 4. – P. 437 - 460.
2. Galtchouk L., Pergamenschikov S. Adaptive Sequential Estimation for Ergodic Diffusion Processes in Quadratic Metric. Journal of Nonparametric Statistics. – 2011. – Vol. 23. – P. 255-285.
3. Pchelintsev E.A., Pchelintsev V.A., Pergamenschikov S.M. Improved robust model selection methods for a Lévy nonparametric regression in continuous time. Journal of Nonparametric Statistics. – 2019. – Vol. 31. – P. 612-628.

**РАСЧЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КАПЕЛЬНОГО УНОСА БОРНОЙ КИСЛОТЫ
ПРИ РАБОТЕ РЕАКТОРА ВВЭР В АВАРИЙНОМ КИПЯЩЕМ РЕЖИМЕ**

А.Р. Сахипгареев, А.С. Шлепки

Научный руководитель: доцент, д.т.н. А.В. Морозов

Физико-энергетический институт имени А.И. Лейпунского,

Россия, г. Обнинск, пл. Бондаренко, 1, 249033

E-mail: sas@ippe.ru

**COMPUTATIONAL MODELING OF BORON ACID DROPLET ENTRAINMENT DURING WWER
REACTOR OPERATION IN EMERGENCY BOILING MODE**

A.R. Sahipgareev, A.S. Shlepk

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Dr. A.V. Morozov

Leypunsky Institute for Physics and Power Engineering, Russia, Obninsk, Bondarenko sq., 1, 249033

E-mail: sas@ippe.ru

***Abstract.** The paper presents the results of a calculation analysis of the processes of droplet entrainment of boric acid by a steam stream in the event of an emergency at a WWER nuclear power plant associated with a guillotine rupture of the main circulation pipeline and the loss of all alternating current sources. The dependence obtained in the course of computational modeling makes it possible to estimate the size of the droplets carried away by the steam stream during the emergency process in the VVER reactor unit during operation of the complex of passive safety systems.*

Введение. В проекте реакторной установки ВВЭР-ТОИ особое внимание уделяется обеспечению безопасности реактора при запроектных авариях с разрывом главного циркуляционного трубопровода и потерей всех источников переменного тока в течение 72 часов. Эта задача решается за счет функционирования пассивных систем безопасности, которые обеспечивают теплоотвод от активной зоны путем подачи в реактор раствора борной кислоты из систем гидроёмкостей первой, второй и третьей ступеней, а также конденсата из парогенератора [1]. Вследствие выпаривания теплоносителя и продолжительной работы систем залива активной зоны [2], возможно увеличение количества борной кислоты в реакторе. Это может привести к затруднению движения жидкости на наружной поверхности тепловыделяющих элементов, тем самым ухудшая теплоотвод. Таким образом, поступление дополнительного объема борной кислоты в активную зону приведёт к превышению её предела растворимости и началу кристаллизации. Однако, этот процесс может быть замедлен в результате капельного уноса части борной кислоты с выходящим из активной зоны паром. Следовательно, исследование процессов удаления борной кислоты из активной зоны имеет важное прикладное значение для расчетов аварийных режимов на АЭС с ВВЭР нового поколения.

Анализа литературных данных по исследованию растворимости борной кислоты в насыщенном водяном паре из [3-5] показал, что представленные в них результаты не охватывают весь диапазон параметров (температура, давление, концентрация кислоты), характерных для возможной аварийной ситуации на АЭС с ВВЭР. Исследования капельного уноса влаги проводились различными

исследователями, но при параметрах не характерных для аварийной ситуации на АЭС с ВВЭР при работе пассивных систем безопасности. Из этого следует необходимость моделирования процесса капельного уноса борной кислоты применительно к реактору ВВЭР, работающему в аварийном кипящем режиме.

Расчетное моделирование. Для определения величины капельного уноса борной кислоты в условиях аварийной ситуации было проведено расчетное моделирование процессов массопереноса в реакторе ВВЭР. При дроблении жидкости образуются капли различных размеров. Более крупные капли под влиянием начальной кинетической энергии, полученной в процессе дробления, забрасываются на большую высоту. Подбрасываемые капли или уносятся потоком пара, или падают назад на зеркало испарения. Известно, что капли жидкости переносятся потоком пара, когда его приведенная скорость выше скорости витания $w_{\text{внт}}$ [6]. Под скоростью витания понимают относительную скорость капли, при которой силы трения уравновешивают вес капли:

$$w_{\text{внт}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{g \cdot d_{\text{кап}}}{\xi} \cdot \frac{\rho' - \rho''}{\rho''}}, \quad (1)$$

где ξ – коэффициент сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса; g – ускорение свободного падения, м/с²; $d_{\text{кап}}$ – диаметр капли, м; ρ' и ρ'' – плотности воды и пара, соответственно, кг/м³.

Если скорость витания больше приведенной скорости пара, то капля упадет назад на зеркало испарения. Коэффициент сопротивления ξ принимается таким же, как и при движении твердого шара [6].

Приведенная скорость пара в корпусе реактора во время аварии с разрывом главного циркуляционного трубопровода равна:

$$w_0'' = \frac{Q''}{S}, \quad (2)$$

где Q'' – объемный расход пара на выходе из активной зоны, м³/с; S – проходное сечение для пара, восходящего над активной зоной, м².

Определив объемный расход пара через величину остаточного энерговыделения и используя данные о внутреннем диаметре обечайки блока защитных труб, количестве труб и их диаметрах, для расчета проходного сечения корпуса реактора, можно рассчитать приведенную скорость пара над активной зоной. При этом диаметр уносимых капель не может превышать следующей величины:

$$d_{\text{капли}}^{\text{max}} = A \cdot N_{\text{ост}}^B, \quad (3)$$

где $A=4,02 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-12,8p}$ и $B=2,23 \cdot p+1,38$, p – давление среды первого контура, МПа.

Результаты. Во время аварии с разрывом главного циркуляционного контура, благодаря совместной работе пассивных систем безопасности, парогенератор переводится в режим конденсации пара, поступающего из активной зоны. Согласно расчетам, давление в первом контуре будет находиться в диапазоне $p = 0,2-0,5$ МПа. Для оценки скоростей витания капель и потока пара рассмотрим три значения давления из данного диапазона: 0,2; 0,3 и 0,5 МПа. На рис. 1 представлено изменение максимальных диаметров капель уносимых потоком пара по мере снижения мощности остаточного энерговыделения при различных значениях давления в первом контуре.

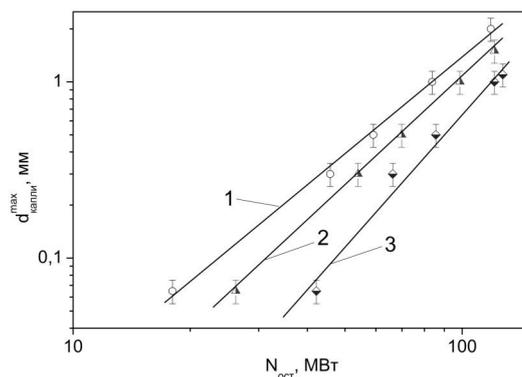


Рис. 1. Зависимость максимального размера уносимых из активной зоны капель от мощности остаточного энерговыделения. 1 – $p=0,2$ МПа, 2 – $p=0,3$ МПа, 3 – $p=0,5$ МПа

С помощью полученной зависимости (3) с точностью 15% можно определить максимальный диаметр капли, уносимой восходящим потоком пара.

Заключение. В АО «ГНЦ РФ – ФЭИ» была выполнена расчетная оценка, результаты которой позволили определить максимальный размер капель, которые могут быть вынесены из активной зоны ВВЭР вместе с потоком пароводяной смеси в парогенератор. Установлено, что на процессы капельного уноса влияние оказывает мощность остаточного энерговыделения, давление среды в реакторе и величина поверхностного натяжения борной кислоты. Для снижения консервативности выполненной расчётной оценки, в дальнейшем, необходимо проведение экспериментального измерения величины поверхностного натяжения раствора H_3BO_3 при параметрах характерных для аварийной ситуации ВВЭР.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-19-10649)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.В., Сорокин А.П., Рагулин С.В., Питык А.В., Сахипгареев А.Р., Сошкина А.С., Шлепки А.С. Влияние процессов массопереноса борной кислоты на ее накопление в активной зоне при аварийных режимах АЭС с ВВЭР // Теплоэнергетика. – 2017. – № 7. – С. 33-38.
2. Морозов А.В., Ремизов О.В., Цыганок А.А. Экспериментальное исследование неравновесных теплогидравлических процессов в системе пассивного залива активной зоны реактора ВВЭР // Известия высших учебных заведений. – Ядерная энергетика. – 2009. – № 4. – С. 115-123.
3. Стырикович М.А., Цхвирашвили Д.Г., Небиеридзе Д.П. Исследование растворимости борной кислоты в насыщенном водяном паре // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 134., № 3. – С. 615-617.
4. Николаева И.Ю., Бычков А.Ю. Экспериментальное исследование растворимости метаборита и сассолина в водяном пару при 155°C // Вестник Отделения наук о Земле РАН. – 2002. – Вып. 20., № 1. – С. 1-2.
5. A. Yassin Hassan, Serdar Osturk, Saya Lee. Rheological characterization of buffered boric acid aqueous solutions in light water reactors // Progress in Nuclear Engineering. – 2015. – Vol. 85. – Pp. 239-253.
6. Кутепов А.В., Стерман Л.С., Стюшин Н.Г. Гидродинамика и теплообмен при парообразовании: Учеб. Пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1986. – 448 с.

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ В
ПРОТОЧНЫХ ТРАКТАХ РДТТ С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГАЗОПРИХОДА**

М.С. Середа, А.В. Червакова

Научный руководитель: младший научный сотрудник К.В. Костюшин
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: mihailsereda@mail.ru

**SOFTWARE PACKAGE FOR CALCULATING THE FLOW OF COMBUSTION PRODUCTS IN
THE FLOW PATHS OF SOLID-FUEL ROCKET ENGINES, TAKING INTO ACCOUNT THE
NON-STATIONARY GAS INTAKE**

M.S. Sereda, A.V. Chervakova

Scientific Supervisor: junior researcher K.V. Kostyushin
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: mihailsereda@mail.ru

***Abstract.** A software package has been developed that allows to study non-stationary gas dynamic processes in flow paths taking into account changes in the filler geometry. The calculation is performed using the Godunov method, taking into account the mobile calculation grid. The geometric parameters of the cells on the burning surface and the local mass flow from the face of the calculated cell at the current time step are calculated using the power law of the burnout rate. Calculations of the end charge are carried out. The results obtained are in good agreement with known solutions and Bori's engineering methodology.*

Введение. Математическое моделирование и исследование процессов горения топлива и течения продуктов сгорания в проточных трактах является неотъемлемой частью разработки и изучения ракетных двигателей. При расчете рабочих характеристик в камере сгорания по инженерным методикам принимается ряд приближений, таких как геометрический закон горения, осреднение давления в камере сгорания по объему и т.д. В реальных условиях выгорание наполнителя происходит неравномерно, что связано с пространственным распределением давления продуктов сгорания в свободной полости камеры сгорания. В таком случае, при расчете нестационарных рабочих характеристик ракетного двигателя, требуется учитывать изменение геометрии заряда топлива в зависимости от местных параметров продуктов сгорания, контактирующих с поверхностью наполнителя. Для решения этой задачи реализован программный комплекс, позволяющий проводить исследования нестационарных газодинамических процессов в проточных трактах РДТТ с учетом изменения геометрии наполнителя в процессе горения.

Методика расчета. Расчет нестационарных газодинамических процессов с учетом изменения геометрии наполнителя проводится на основе методики, базирующейся на применении схемы Годунова, с учетом подвижной пространственной дискретной сетки [1] для решения невязких уравнений газовой динамики. Метод Годунова является одним из самых надежных и хорошо апробированных методов. Для общего случая можно записать следующую схему:

$$\begin{aligned} \frac{(\rho G)_i^{k+1} - (\rho G)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} R_j ([\mathbf{V} - \mathbf{D}] \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j &= 0, \\ \frac{(\rho \mathbf{v} G)_i^{k+1} - (\rho \mathbf{v} G)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} (R \mathbf{V})_j ([\mathbf{V} - \mathbf{D}] \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j + \sum_{j=1}^{m(i)} P_j \mathbf{S}_j^{k+1/2} &= 0, \\ \frac{(eG)_i^{k+1} - (eG)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} E_j ([\mathbf{V} - \mathbf{D}] \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j + \sum_{j=1}^{m(i)} P_j \mathbf{S}_j^{k+1/2} &= 0, \\ \frac{G_i^{k+1} - G_i^k}{\Delta t} - \sum_{j=1}^{m(i)} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{k+1/2})_j &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{S}_j = \mathbf{n}_j S_j$, а Δt – шаг по времени. Нижний целый индекс i обозначает величины функций, отнесенные к центру i -ой дискретной ячейки, а нижний целый индекс j обозначает величины, отнесенные к центру j -ой грани дискретной ячейки, \mathbf{D}_j – скорость движения центра j -ой грани дискретной ячейки. Верхний целый индекс k обозначает номер шага по времени. Полуцелые верхние индексы $k+1/2$ обозначают значения соответствующих величин в момент времени $t+0,5\Delta t$. Уравнение (1) является уравнением изменения объема дискретной ячейки G_i . Большие величины R , \mathbf{V} , P , E обозначают соответственно плотность, скорость, давление и полную энергию на гранях дискретной сеточной ячейки. Эти величины вычисляются путем решения задачи распада произвольного разрыва для уравнений газовой динамики.

Метод основан на определении потоков через грани расчетных ячеек с использованием точного или приближенного метода решения задачи о распаде произвольного разрыва. Одной из методик нахождения параметров на разрывах является приближенный метод Роу [2], использующий приближенное решение задачи Римана для специальным образом линеаризованной исходной системы уравнений. Основным положительным фактором использования этого метода является сравнительно высокая скорость расчета.

Геометрические параметры ячеек на поверхности горения (2) и локальный массовый газоприход с грани расчетной ячейки (3) на текущем шаге по времени вычисляется с использованием степенного закона скорости горения (4):

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{n} u \Delta t, \quad (2)$$

$$m = r_T u, \quad (3)$$

$$u = u_0 p_i^h, \quad (4)$$

где u – скорость горения, u_0 , h – константы в законе скорости горения, p_i – давление в ячейке, \mathbf{x} – вершины подвижной грани ячейки, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к грани ячейки, m – локальный массовый поток, r_T – плотность топлива.

Результаты расчетов и выводы. Разработан программный комплекс для расчета нестационарных процессов в проточных трактах РДТТ, поддерживающий возможность пользовательского задания геометрии проточного тракта, начальных и граничных условий, позволяющий визуализировать и сохранять результаты расчетов. С его использованием проведены расчеты рабочих характеристик в проточных трактах РДТТ с торцевым зарядом. Диаметр заряда 0,4 м, длина 0,3 м. Время полного

выгорания составило 1,4 с. В качестве наполнителя использовалось твердое ракетное топливо марки «SC» [3], $u_0 = 0,00779$ м/с, $h = 0,69$. Вычислительная область была покрыта прямоугольной расчетной сеткой, состоящей из 100 ячеек. Во время расчета количество ячеек не изменялось.

Результаты расчетов представлены на рис.1 в виде распределения давлений по длине проточного тракта РДТТ в различные моменты времени. В период 0,1-0,2 с наблюдаются скачки кривых давления, что объясняется движением ударной волны вдоль продольной координаты проточного тракта. В момент времени 0,3 с скачок отсутствует – течение в сверхзвуковой части сопла установилось. Нулевое значение оси абсцисс совпадает с фронтом горения в начальный момент времени. По мере выгорания заряда фронт горения меняет свое положение, с чем связаны отрицательные значения на оси абсцисс. Параметр Δl – толщина свода топлива, выгоревшего за время работы двигателя 1,2 с.

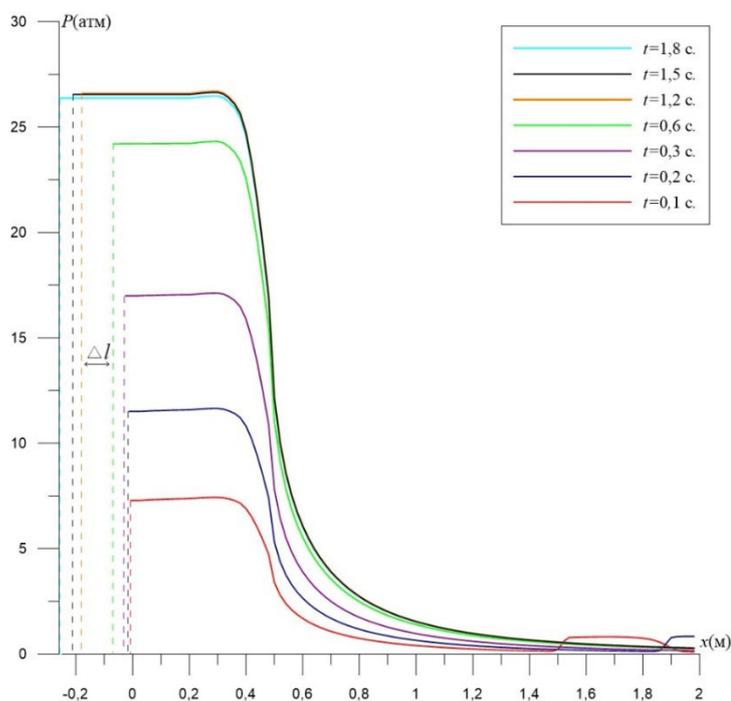


Рис. 1. Распределение давлений по длине проточного тракта РДТТ с учетом выгорания заряда

Верификация проведена путем сравнения с [4], полученные результаты хорошо согласуются с известными решениями. Методика и программа расчета может использоваться для расчета нестационарных процессов в камерах сгорания и соплах РДТТ с зарядами достаточно произвольной конфигурации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 607.
2. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Third Edition – SpringerVerlag, Berlin Heidelberg, 2009, 724 p. DOI: 10.1007/b79761
3. Алемасов В.Е. Теория ракетных двигателей : учебник для студентов высших технических учебных заведений / В.Е. Алемасов, А.Ф. Дрегалин, А.П. Тишин. – М.: Машиностроение, 1989. -464 с.
4. Яскин А.В. Теория устройства ракетных двигателей : учебное пособие / А. В. Яскин – Б.: Алт. гос. техн. ун-та, 2013. -262с.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Г.К. Соколова

Научный руководитель: доцент, к. ф-м н. С.С. Орлов

Иркутский государственный университет,

Россия, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1, 664003

E-mail: 98gal@mail.ru

PERIODIC SOLUTIONS OF SOME CLASSES OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

G.K. Sokolova

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD S.S. Orlov

Irkutsk State University, Russia, Irkutsk, Karl Marx str, 1, 664003

E-mail: 98gal@mail.ru

Abstract. *This note deals with the study of the periodicity of functions of several real variables. The constancy of the function is considered as a special case of periodicity. Without loss of generality, we consider periodic functions with a rectangular lattice as the set of their periods. The structure of the set of periods of periodic function of several variables is described. It is shown that author's results are applicable to the study of the existence of periodic solutions of partial differential equations.*

Представляемая работа посвящена исследованию основных свойств периодических функций нескольких действительных переменных. Ранее автором были доказаны теоремы интегрального и дифференциального исчисления таких функций [1].

Определение 1. Функцию $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *периодической* с периодом \mathbf{T} , если существует вектор $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$ такой, что выполняется равенство $f(\mathbf{r} + \mathbf{T}) = f(\mathbf{r})$ при любом $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$. Период \mathbf{T}_0 наименьшего модуля, сонаправленный с вектором \mathbf{T} , называется *основным периодом* функции f в данном направлении $\boldsymbol{\tau}$, где $\mathbf{T} = |\mathbf{T}|\boldsymbol{\tau}$.

Важной проблемой в теории периодических функций является описание множества периодов P_f периодической функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Как показано в работе [2], множество периодов периодической функции f нескольких переменных состоит из векторов

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \mathbf{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \boldsymbol{\tau}_k$$

где \mathbf{T}_k – базисные векторы m_1 -мерной решётки [3, стр. 13], $\boldsymbol{\tau}_k$ – направления, вдоль которых данная функция постоянна, причём $m_1 + m_2 \leq n$, а числа $n_k \in \mathbb{Z}$ и $\alpha_k \in \mathbb{R}$ одновременно не обращаются в нуль. Всякий период \mathbf{T} периодической функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно представим в указанном

виде при любых базисах m_1 -мерной решётки $\Lambda(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_{m_1})$ периодов и m_2 -мерного подпространства пространства \mathbb{R}^n . Таким образом, имеет место представление

$$P_f = \Lambda(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_{m_1}) \oplus \text{span}(\boldsymbol{\tau}_{m_1+1}, \boldsymbol{\tau}_{m_1+2}, \dots, \boldsymbol{\tau}_{m_1+m_2}).$$

Невырожденным линейным преобразованием аргумента $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ всякую периодическую функцию n штук переменных можно сделать периодической по выбранным m_1 переменным и постоянной по следующим выбранным m_2 переменным. Таким образом, без ограничения общности, всякую периодическую функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно считать периодической по первым m_1 переменным и постоянной по следующим m_2 переменным.

В статье [4] доказан критерий периодичности суммы и произведения периодических функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, получены оценки множеств периодов суммы P_{f+g} и произведения $P_{f \cdot g}$. Заметим, что в общем случае множества периодов P_{f+g} и $P_{f \cdot g}$ разные и содержат, по крайней мере, пересечение множеств периодов P_f и P_g периодических функций f и g .

В докладе планируется показать применение полученных выше результатов к исследованию вопроса существования и построения множества периодов периодических решений уравнений в частных производных. Рассмотрим задачу Гурса для гиперболического уравнения

$$\partial_{xy} u(x, y) = f(x, y); \quad u(x, y)|_{y=0} = a(x); \quad u(x, y)|_{x=0} = b(y).$$

Теорема 2. Пусть $f: [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная периодическая функция с решёткой периодов $\Lambda(\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y)$, порождённой векторами $\mathbf{T}_x = T_x \mathbf{i}$ и $\mathbf{T}_y = T_y \mathbf{j}$, где \mathbf{i} и \mathbf{j} – орты, $a: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и $b: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемые периодические функции с периодами T_x и T_y соответственно, удовлетворяющие условию $a(0) = b(0)$. Тогда для того, чтобы классическое решение $u: [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ задачи Гурса было периодическим по переменным x и y , необходимо и достаточно, чтобы при всех $(x, y) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ выполнялись условия

$$\int_0^{T_x} f(t, y) dt = \int_0^{T_y} f(x, t) dt = 0,$$

причём множеством периодов этого решения является $P_u = P_{a+b} \cap P_f$.

Далее приведём соответствующий результат для уравнения Пфаффа. Рассмотрим уравнение

$$f_1(\mathbf{r})dx_1 + f_2(\mathbf{r})dx_2 + \dots + f_n(\mathbf{r})dx_n, \quad (1)$$

где непрерывные функции $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, имеют непрерывные частные производные по совокупности переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Как известно, если уравнение (1) удовлетворяет условиям *полной интегрируемости*

$$\partial_{x_j} f_i(\mathbf{r}) = \partial_{x_i} f_j(\mathbf{r}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

то оно является уравнением в полных дифференциалах, и его общий интеграл имеет вид

$$u(r) = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} f_i(0, 0, \dots, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt + C \quad (3)$$

Проблема существования периодических решений уравнения Пфаффа с условиями (2) его полной интегрируемости ранее изучалась в статье [5], в которой доказан критерий периодичности общего интеграла (3) с периодом $\mathbf{T} = T_1 \mathbf{e}_1 + T_2 \mathbf{e}_2 + \dots + T_n \mathbf{e}_n$, где $\{\mathbf{e}\}_{i=1}^n$ – стандартный базис Гамеля в \mathbf{R}^n .

Пусть общий интеграл уравнения Пфаффа (1) является периодической по всем переменным x_1, x_2, \dots, x_n функцией $u : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Тогда, в силу выполнения условия (2), функции $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ также периодические, а множествами их периодов P_{f_i} являются решётки, порождённые векторами $\mathbf{T}_{i1}, \mathbf{T}_{i2}, \dots, \mathbf{T}_{in}$ и имеющие непустое пересечение. Здесь и далее $\mathbf{T}_{ij} = T_{ij} \mathbf{e}_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 3. Пусть непрерывные функции $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ являются периодическими с множествами периодов P_{f_i} , порождёнными векторами $\mathbf{T}_{ij} = T_{ij} \mathbf{e}_j$, где $i, j = 1, 2, \dots, n$, и имеют непрерывные частные производные $\partial_{x_j} f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющие условию (2). Тогда для того, чтобы общий интеграл (3) уравнения Пфаффа (1) был периодической функцией по переменным x_1, x_2, \dots, x_n , необходимо и достаточно, чтобы $P_{f_1} \cap P_{f_2} \cap \dots \cap P_{f_n} \neq \emptyset$, и при всех $i = 1, \dots, n$ выполнялось

$$\int_0^{T_i} f_i(0, 0, \dots, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt = 0.$$

Множеством периодов общего интеграла (3) является $P_u = P_{f_1} \cap P_{f_2} \cap \dots \cap P_{f_n}$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Иркутской области в рамках научного проекта № 20-41-385002 p_Наставник.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколова Г.К. О периодических функциях нескольких переменных // Сборник статей Всероссийской молодёжной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Все грани математики и механики». – Томск: Издательский Дом ТГУ, 2019. – С. 218–227.
2. Соколова Г.К. О периодических функциях нескольких действительных переменных // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении. – 2018. – №5 (9). – С. 60–65.
3. Скриганов М.М. Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Труды МИАН СССР. – 1985 – Т. 171. – С. 3–122.
4. Соколова Г.К. Периодичность суммы и произведения периодических функций нескольких переменных // Сборник материалов Международной конференции «XXIX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» КРОМШ – 2018. – Симферополь: Полипринт, 2018. – С. 28–31.
5. Тажимуратов И.О. периодических решениях одной системы уравнений в частных производных первого порядка // Математические заметки. – 1981. – Т. 30, № 3. – С. 363–369.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ЗАЖИГАНИЯ
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ФРАГМЕНТОВ В ЛАБОРАТОРНЫХ УСЛОВИЯХ**

В.А. Тараканова^{1,2}, Д.П. Касымов^{1,2}, М.В. Агафонцев^{1,2}

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Д.П. Касымов

¹ Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

² Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН,

Россия, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1, 634055

E-mail: veronika.tarakanova@mail.ru

**EXPERIMENTAL STUDY OF IGNITION CHARACTERISTICS OF TIMBER STRUCTURES AND
FRAGMENTS IN LABORATORY CONDITIONS**

V.A. Tarakanova^{1,2}, D.P. Kasymov^{1,2}, M.V. Agafontsev^{1,2}

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., Cand. of Phys.-Math. Sc. D.P. Kasymov

¹ Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

² V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Russia, Tomsk, 1, Academician Zuev Sq.

E-mail: veronika.tarakanova@mail.ru

Abstract. *This paper presents investigation on behaviour of wood construction material samples (plywood, oriented strand board (OSB), chipboard) in laboratory conditions as a result of a heat flux effect on the horizontal and vertical surface of the samples, from occurring flaming and glowing firebrands. This modeled the case when firebrands can accumulate in the corners of buildings. The probability of ignition of building materials made of wood as a result of heat exposure was investigated. It was found that the size and quantity of firebrands, initial temperature of samples, as well as the presence of air flow in the firebrands falling zone affect the ignition process of the samples.*

Введение. Пожары на природно-урбанизированной территории на сегодняшний день являются растущей проблемой во всем мире [1]. По мере того, как растительность и строения сгорают, фрагменты горящего материала, генерируются, поднимаются и переносятся преобладающим ветром на большие расстояния, которые также могут перейти на территорию городской среды.

Вероятность возгорания строительных конструкций зависит как от физических свойств (например, кровельный материал, доски, вентиляционные отверстия), так и от условий воздействия факторов пожара (например, масштабы и продолжительность теплового потока от пламени и тлеющих и горящих частиц). Многие исследования показали, что тлеющие и горящие частицы, играют ведущую роль как в распространении огня, так и в воспламенении конструкций [2, 3].

Целью данного исследования является проведение лабораторных экспериментов для выявления особенностей зажигания и горения конструкций и фрагментов из древесины, при тепловом воздействии от точечного источника зажигания.

Материалы и методы исследования. Для проведения данного исследования была использована лабораторная установка (рис. 1), моделирующая случай, когда частицы, образованные во время пожара, могут скапливаться в углах зданий и приводить к их воспламенению.

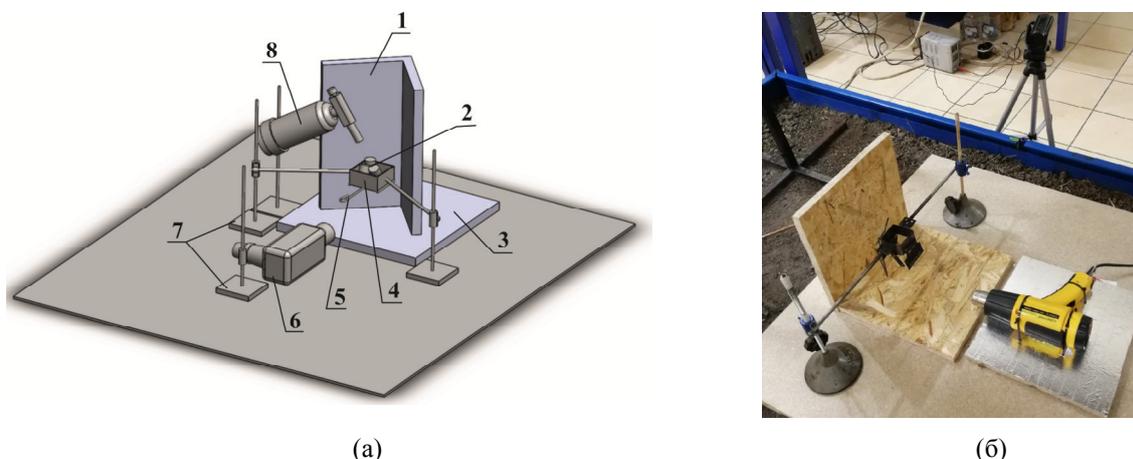


Рис. 1. Схема (а) и фотография (б) лабораторной установки: 1 – образец конструкции; 2 – образцы частиц; 3 – поддон; 4 – кювета; 5 – стопор; 6 – строительный фен; 7 – штативы; 8 – горелка

Предварительно подготавливалась строительная конструкция: два образца сшивались между собой таким образом, чтобы между ними образовывался прямой угол (Рис. 1). В качестве образцов в экспериментах использовалась ориентированно-стружечная плита с размерами 15×30 см и толщиной 18 см. Перед проведением эксперимента данная строительная конструкция устанавливалась на образец строительного материала (ориентированно-стружечная плита) и осуществлялся сброс частиц. Таким образом моделировался случай проникновения и дальнейшей аккумуляции частиц от природного пожара в конструктивных элементах стен и крыши или вентиляционных отверстий.

В качестве частиц, использовались образцы из древесины, по размеру совпадающие с типичными размерами частиц, определенных в ходе натурных экспериментов [4]. Влажность частиц не превышала 10 %, для образцов древесных строительных материалов оно составило 6–8 %. В экспериментах тлеющие частицы, сбрасываемые на образцы древесины, обдувались с помощью теплового фена марки LODESTAR потоком нагретого воздуха со скоростью, составляющей 5 м/с, с соответствующей температурой 400 °, что отвечает физике процесса, когда деревянное строение подвергается воздействию теплового потока от надвигающегося фронта лесного пожара. Дополнительно с использованием инфракрасной камеры JADE J530SB были проведены измерения тепловой картины непосредственно в зоне сброса частиц. При выбранных параметрах эксперимента нагрев вертикальных стенок представленной угловой конструкции не превышал 120 °.

Результаты и выводы. В ранее проведенных экспериментах была использована лабораторная установка, позволяющая производить исследование по заиганию горящими частицами горизонтальной поверхности образца древесины (Рис.2) [5]. Перед проведением эксперимента образцы предварительно нагревались в течении 4 мин. Тлеющие частицы, сбрасываемые на исследуемые образцы, обдувались потоком нагретого воздуха со скоростью, составляющей 0 – 2,5 м/с. Установлено, что в диапазоне скоростей ветра 0 – 1 м/с воспламенения образцов строительных материалов не наблюдалось, влияние

частиц природного происхождения, находящихся в фазе тления, не оказывает влияние на зажигание образцов древесных строительных материалов [5]. Выбор данных скоростей можно объяснить тем, что при дальнейшем увеличении скорости, частицы уносились за пределы исследуемой области, а при меньших скоростях вероятность воспламенения образца от тлеющих и горящих частиц была очень мала.



Рис. 2. Фотография развития процесса горения строительной конструкции в результате аккумуляции частиц

Выявлено, что на процесс воспламенения образцов влияет размер и количество частиц, начальная температура образцов, а также наличие воздушного потока в зоне падения частиц. Сравнительный анализ показал, что при увеличении скорости ветра фаза тления частиц достаточно быстро переходит в фазу пламенного горения (Рис. 2), кроме того, по бокам стенок образуются завихрения воздуха вследствие геометрии образца. Предварительные результаты показывают, что вероятность воспламенения в случае накопления частиц вблизи модельной угловой конструкции возрастает более чем на 50 % при одинаковом количестве частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 18-79-00232).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rossi J., Chatelon F., Marcelli T. Fire Intensity // In Encycl. Wildfires Wildland-Urban Interface Fires. – 2019.
2. Manzello S.L., Suzuki S., Gollner M.J., Fernandez-Pello A.C. Role of Firebrand Combustion in Large Outdoor Fire Spread // Progress in energy and combustion science. – 2020. – Vol. 76. No 100801. DOI:10.1016/j.pecs.2019.100801
3. Caton S.E., Hakes R.S.P., Gorham D.J. et al. Review of Pathways for Building Fire Spread in the Wildland Urban Interface Part I: Exposure Conditions // Fire Technol. – 2017. – V. 53. – P. 429–473. <https://doi.org/10.1007/s10694-016-0589-z>
4. Filkov A.I., Prohanov S.A., Mueller E., Kasymov D.P., et al. Investigation of firebrand production during prescribed fires conducted in a pine forest // Proc. of the Combustion Institute. – 2017. – V. 36(2). – P. 3263–3270. doi: 10.1016/j.proci.2016.06.125
5. Kasymov D. P., Tarakanova V. A., Martynov P. S. and Agafontsev M. V. Studying firebrands interaction with flat surface of various wood construction materials in laboratory conditions // J. Phys.: Conf. Ser. – https://doi.org/10.1007/978-3-319-51727-8_51-12019. – V. 1359. 012092. doi:10.1088/1742-6596/1359/1/012092.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДВИЖЕНИЯ АТОМА ГЕЛИЯ ВНУТРИ МОЛЕКУЛЫ ФУЛЛЕРЕНА C₆₀**

Е.А. Тарасов

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: diomedis@mail.ru

**MATHEMATICAL MODELING
OF HELIUM ATOM MOTION INSIDE THE FULLERENE C₆₀ MOLECULE**

E.A. Tarasov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

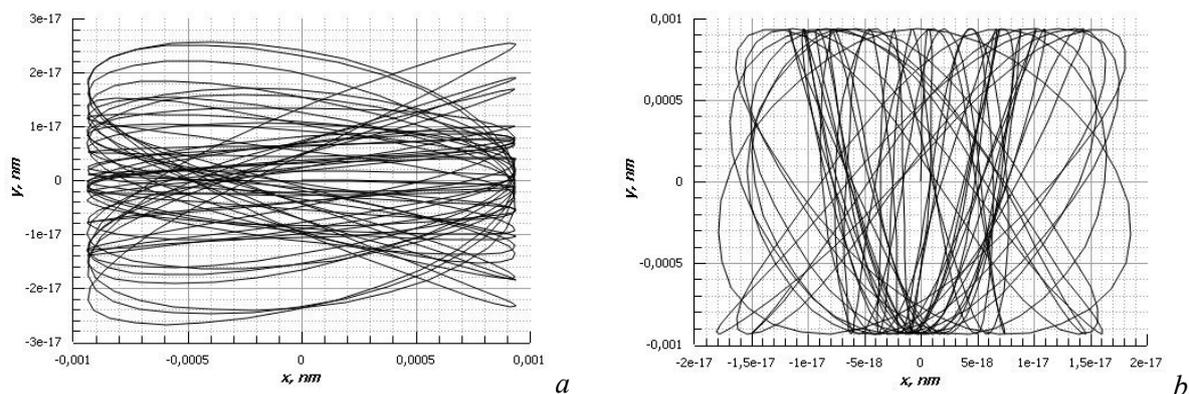
E-mail: diomedis@mail.ru

***Abstract.** In this research, the process of motion of a helium atom with different velocities inside the C₆₀ fullerene sphere was numerically modeled. The transverse dimensions of the area inside the fullerene molecule in which the selected particle (helium atom) moves was obtained.*

Введение. С момента своего открытия в 1985 году группой ученых (Робертом Кёрлом, Харольдом Крото и Ричардом Смолли) фуллерены, в том числе бакминстерфуллерен C₆₀, представляют большой интерес в различных областях науки. Так, в работе [1] описан вариант идеи применения C₆₀ для лечения опорно-двигательного аппарата, за счет его антиоксидантных свойств. В работах [2, 3] представлены исследования свойств фуллерита – материала, который состоит из молекул фуллерена. В предыдущих работах автора [4, 5] исследовались особенности взаимодействия различных газовых компонент с мембранами, структурными элементами которых являлись молекулы фуллерена.

Материалы и методы исследования. В данной работе численно моделировался процесс движения атома гелия с различными скоростями внутри фуллереновой сферы C₆₀. Модель была построена исходя из предположения об описании такого движения с помощью классической механики и модифицированного потенциала Леннарда-Джонса. Далее с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка точности полученная математическая модель движения в поле потенциальных сил решалась численно. Решение было реализовано на языке Fortran.

Результаты. В ходе моделирования движения атома гелия внутри фуллереновой сферы были получены следующие результаты, представленные на рисунке 1.



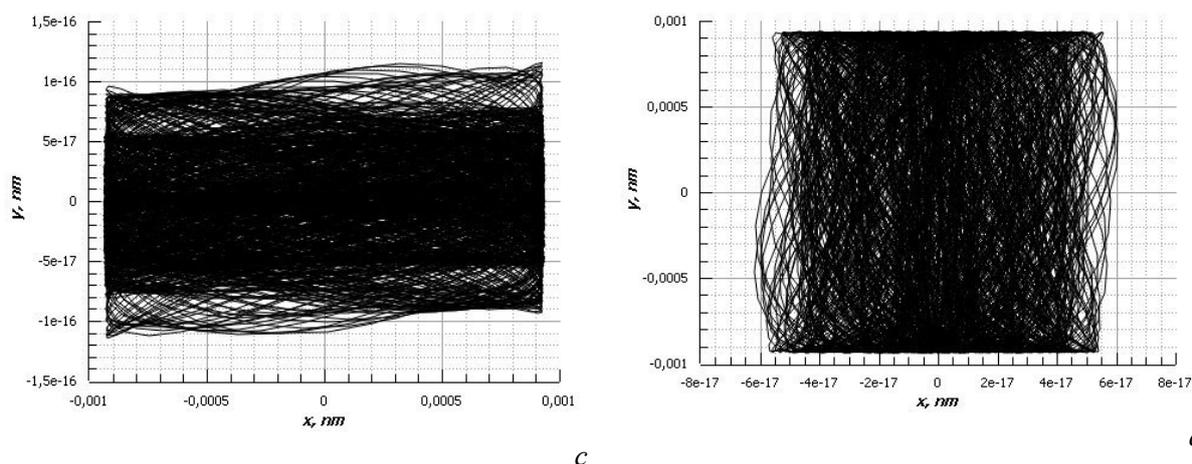
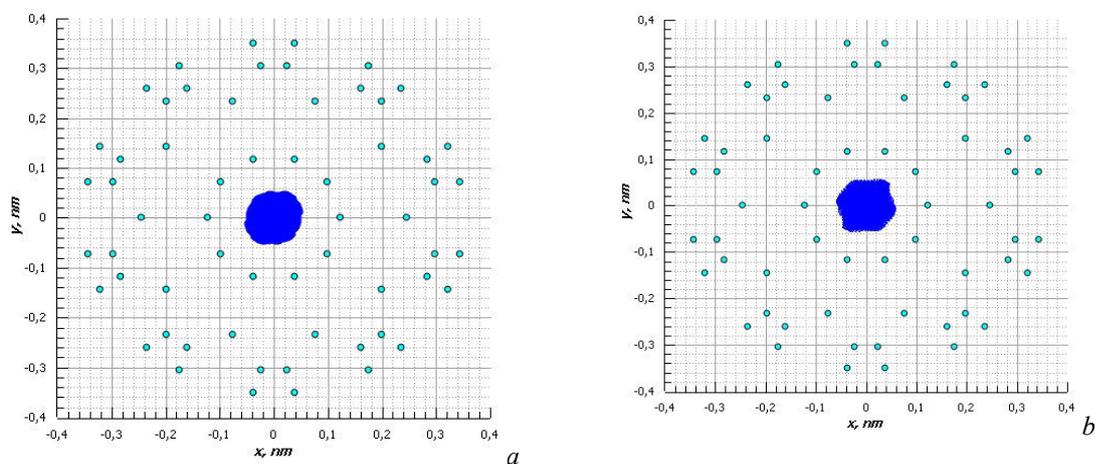


Рис. 1. Траектории движения атомов гелия внутри фуллереновой сферы C_{60} , количество шагов итерационного процесса: $a, b - 1\ 000$, $c, d - 10\ 000$

На рисунках выше можно видеть, что в случае наличия только горизонтальной (рисунок 1a и 1c) или вертикальной (рисунок 1b и 1d) составляющей скорости, движение имеет явно выраженный плоский характер. Отклонение от оси, по сравнению с движением частицы вдоль этой оси составляет незначительную величину, разница превышает десять порядков. В более крупном масштабе соответствующих осей, траектория движения будет представлять собой прямое перемещение атома гелия от одной границы разрешенной области внутри фуллереновой сферы до другой границы. Для иллюстрации движения атома гелия, имевшего в начальный момент времени как вертикальную, так и горизонтальную составляющую скорости ниже представлен рисунок 2. На нем представлены результаты моделирования движения атомов гелия внутри фуллереновой сферы при числе шагов $n = 100000$ и значениях вертикальной и горизонтальной составляющих скорости равных 500, 750, 1000 и 3000 м/с. Из рисунка 2 видно, что существует зависимость размера области, в которой происходит движение атома гелия, от начальной скорости этого атома. Случай, в котором скорость составляет 3000 м/с приведен для того, чтобы продемонстрировать, что данная модель физична, так как обладая нужной энергией, атом способен преодолеть энергетический барьер, создаваемый фуллереном и покинуть пределы его внутренней области. Фактически, для атомов с различной энергией внутри фуллереновой сферы доступны различные области внутри этой сферы, так как плотность поля связана с расстоянием от отдельных атомов углерода, составляющих фуллерен.



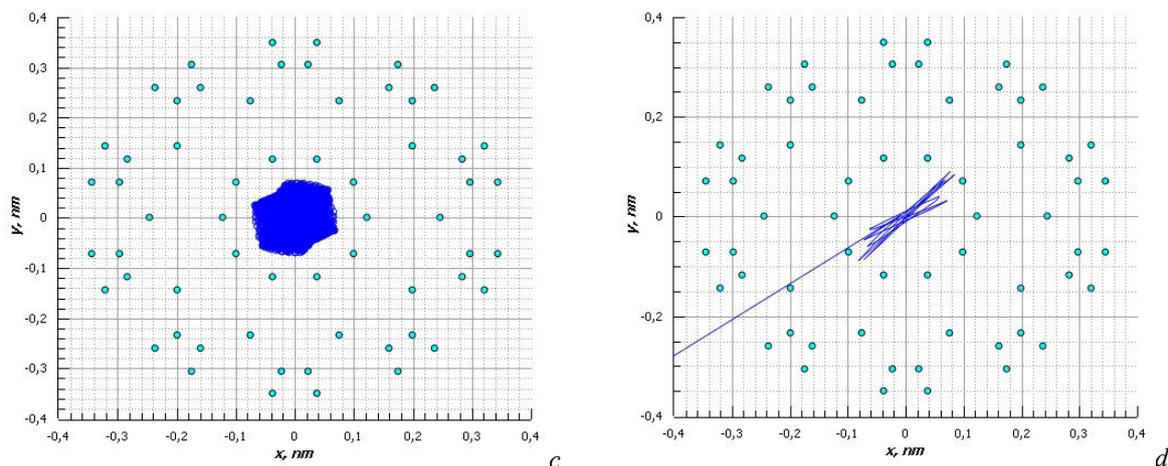


Рис. 2. Траектории движения атомов гелия внутри фуллереновой сферы C_{60} ,
скорость атома гелия, м/с: $a - 500$, $b - 750$, $c - 1\ 000$, $d - 3\ 000$

Автор предполагает, что в случае движения ансамбля атомов гелия с различными энергиями движение будет также сосредоточено в подобных областях, с учетом взаимодействия между самими атомами внутри этой области.

Заключение. В результате моделирования можно видеть, что внутри молекулы фуллерена существует область, с поперечными размерами (зависящими от энергии атомов гелия) 1-1,5 ангстрема, в которой возможно нахождение свободных атомов гелия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu Qihai. The applications of buckminsterfullerene C_{60} and derivatives in orthopaedic research / Qihai Liu, Quanjun Cui, Xudong Joshua Li, and Li Jin // Connect Tissue Res. – 2014 April; 55(2), pp. 71–79. doi:10.3109/03008207.2013.877894
2. Olyanich D.A. C_{60} capping of metallic 2D Ti-Au compound with preservation of its basic properties at the buried interface / D.A.Olyanich, V.V.Mararov and others // Applied Surface Science – 2020. – Vol. 501, 31 January, – P. 144253 <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2019.144253>
3. Ji W.M. Molecular dynamics simulations of water desalination through polymerized fullerite membrane / W.M.Ji, L.W.Zhang // Journal of Membrane Science – 2019. – Vol. 576, 15 April. – pp 108-115 <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2019.01.028>
4. Tarasov, E.A. Comparison of two elementary nanomembranes cells for gas mixture separation problem. Key Engineering Materials. - 2018. - Vol. 769, pp.128-133 – DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.769.128>
5. Bubenchikov M.A., Calculating permeability of the low-temperature phase of a fullerite / M.A. Bubenchikov, A.M. Bubenchikov, E.A. Tarasov, O.V. Usenko, A.S. Chelnokova // Diamond and Related Materials. - 2018. - Vol. 86, pp.146-158 – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.diamond.2018.04.017>

**INFLUENCE OF THE HEATER LOCATION
ON HEAT AND MASS TRANSFER IN A LARGE-SCALE ENCLOSURE**

A.A. Toylibaev, S.I. Sabaev, I.V. Miroshnichenko

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: miroshnichenko@mail.tsu.ru

**ВЛИЯНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НАГРЕВАТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА
НА ТЕПЛОМАССОБМЕН В КРУПНОГАБАРИТНЫХ ОБЛАСТЯХ**

А.А. Тойлибаев, С.И. Сабаев, И.В. Мирошниченко

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: miroshnichenko@mail.tsu.ru

***Аннотация.** Рассматривается задача конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутой крупногабаритной области с локальным нагревательным элементом. Основной задачей исследования является оценка влияния положения источника тепловыделения на структуру течения и теплообмен в рассматриваемой области. Актуальность рассматриваемой задачи обусловлена, в первую очередь, возможностью применения полученных результатов с целью повышения эффективности существующих методик расчета конвективно-радиационного теплообмена в строительных сооружениях. Процесс переноса массы, импульса и энергии описывается системой осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса. При проведении численного исследования предполагалось, что теплофизические свойства стенок и газа не зависят от температуры. Режим течения турбулентный. В результате получены распределения изолиний функции тока и температуры, а также средние числа Нуссельта на характерных границах.*

Numerical and experimental studies of turbulent free convection with radiation in enclosures have become interesting for investigators in the field of fluid mechanics and heat transfer. The interest in the present problem is because of the importance of these processes in numerous engineering applications, such as thermal comfort in building [1-3]. A comprehensive review of thermal transmission in attic-shaped spaces has been presented by Saha and Khan [4]. Their findings have indicated that most works have been performed in the laminar and transition regimes. At the same time, as practice shows, the airflow in the real attic must be fully turbulent. Therefore, numerical analysis of hydrodynamics and thermal transmission inside attic (or other large areas) should be carried out in this regime.

Despite of the current notable advances in both experimental and numerical methods, the heat transfer due to convection and radiation in enclosures (rooms) with heaters needs more attention. The goal of this study is to investigate natural convection with thermal surface radiation in large-scale enclosure with a local heater of constant temperature. It is observed that in applications associated with large enclosures, Rayleigh number is frequently very high, meaning that the nature of convection in the enclosure is fully turbulent.

2D unsteady free convection with surface radiation in a large-scale enclosure with a local heater is considered using the system of coordinates as shown in Figure 1. Here, L represents the width and height of the

enclosure. The discrete heater is assumed to be isothermal at a higher temperature T_h , while the vertical walls are maintained at low temperature T_c . The horizontal walls are considered to be adiabatic. The surfaces are supposed to be gray and diffuse, and thermophysical properties of the fluid are constant. The medium under consideration is air, which is both radiatively transparent and incompressible, and also Boussinesq approximation is valid.

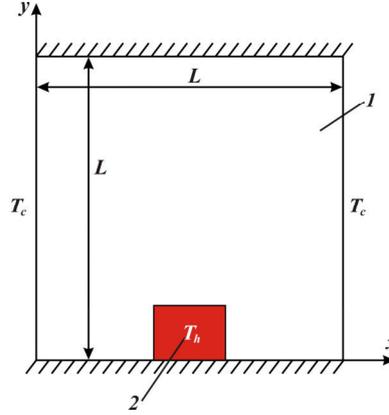


Fig. 1. The domain of interest: 1 – air, 2 – heat source of constant temperature

Due to the abovementioned assumptions, the two-dimensional turbulent flow in the considered enclosure can be described by the following governing dimensional equations [5]:

$$\frac{d^2\xi}{dX^2} \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \left(\frac{d\xi}{dX}\right)^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + \frac{d^2\eta}{dY^2} \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} + \left(\frac{d\eta}{dY}\right)^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} = -\Omega, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial\tau} + \left(U - \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial v_t}{\partial\xi}\right) \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} + \left(V - \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial v_t}{\partial\eta}\right) \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} &= \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial}{\partial\xi} \left[\left(\frac{\sqrt{\text{Pr}}}{\sqrt{\text{Ra}}} + v_t \right) \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} \right] + \\ + \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\left(\frac{\sqrt{\text{Pr}}}{\sqrt{\text{Ra}}} + v_t \right) \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} \right] &+ \left(\frac{d^2\xi}{dX^2} \frac{\partial v_t}{\partial\xi} + \left(\frac{d\xi}{dX}\right)^2 \frac{\partial^2 v_t}{\partial\xi^2} - \frac{d^2\eta}{dY^2} \frac{\partial v_t}{\partial\eta} - \left(\frac{d\eta}{dY}\right)^2 \frac{\partial^2 v_t}{\partial\eta^2} \right) \times \\ \times \left(\Omega + 2 \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial U}{\partial\eta} \right) &+ 4 \frac{d\xi}{dX} \left(\frac{d\eta}{dY}\right)^2 \frac{\partial^2 v_t}{\partial\xi \partial Y} \frac{\partial V}{\partial\eta} + \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial\Theta}{\partial\xi} \cos\varphi - \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial\Theta}{\partial\eta} \sin\varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + U \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial\Theta}{\partial\xi} + V \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial\Theta}{\partial\eta} = \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial}{\partial\xi} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} + \frac{v_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial\Theta}{\partial\xi} \right] + \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} + \frac{v_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial\Theta}{\partial\eta} \right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial K}{\partial\tau} + U \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial K}{\partial\xi} + V \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial K}{\partial\eta} = \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial}{\partial\xi} \left[\left(\frac{\sqrt{\text{Pr}}}{\sqrt{\text{Ra}}} + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial K}{\partial\xi} \right] + \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\left(\frac{\sqrt{\text{Pr}}}{\sqrt{\text{Ra}}} + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial K}{\partial\eta} \right] + \bar{P}_k + \bar{G}_k - E, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial\tau} + U \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial E}{\partial\xi} + V \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial E}{\partial\eta} &= \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial}{\partial\xi} \left[\left(\frac{\sqrt{\text{Pr}}}{\sqrt{\text{Ra}}} + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial E}{\partial\xi} \right] + \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\left(\frac{\sqrt{\text{Pr}}}{\sqrt{\text{Ra}}} + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{d\eta}{dY} \frac{\partial E}{\partial\eta} \right] + \\ + \left[c_{1\epsilon} (\bar{P}_k + c_{3\epsilon} \bar{G}_k) - c_{2\epsilon} E \right] &\frac{E}{K}. \end{aligned} \quad (5)$$

where α_h – thermal diffusivity of the heater, q_v – volume density of heat flux, $P_k = v_t \left[2(\partial u/\partial x)^2 + 2(\partial v/\partial y)^2 + (\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)^2 \right]$ is the term characterizing the turbulence production due to

shear stresses, $G_k = -v_t/Pr_t \cdot \partial T/\partial y$ is the term describing the destruction/generation of the turbulent kinetic energy through the buoyancy force. The Kolmogorov–Prandtl formula $v_t = c_\mu k^2/\varepsilon$ was used to calculate turbulent viscosity.

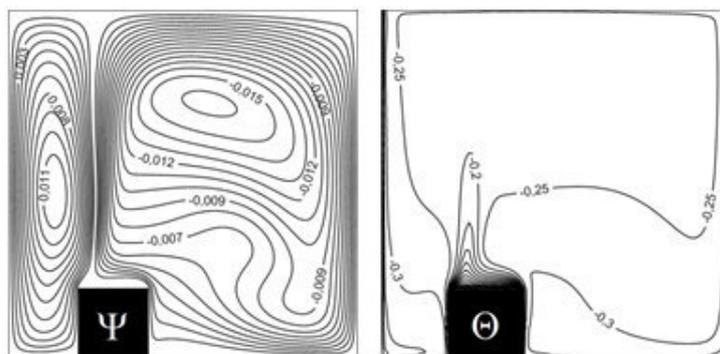


Fig. 2. Streamlines Ψ and isotherms Θ at $Ra = 10^{10}$, $\tilde{\varepsilon} = 0.6$, $\tau = 300$, $l/L = 0.2$.

The corresponding boundary conditions were described in [5]. The finite-difference method is used to solve the set of governing equations. Figure 2 shows the isotherms and streamlines at certain value of the Rayleigh number. The flow rises in the cavity due to buoyancy effect and falls along each cold side walls that rotate counterclockwise in the left half and clockwise in the right half. It is clear that the location of the heater near left wall can lead to increase in the size of one cell to the detriment of the other. Detailed analysis has been carried out to understand the effect of various locations of the heat source on heat transfer and fluid flow parameters. An efficient numerical technique has been developed to solve this problem. As a result of the research, various distributions of integral and local parameters characterizing the hydrodynamic and thermal transmission in the enclosure have been obtained.

This work was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 19-79-00296).

REFERENCES

1. Rahimi, M. and Sabernaemi, A. (2010). Experimental study of radiation and free convection in an enclosure with a radiant ceiling heating system. *Energy and Buildings*, Vol. 42, pp. 2077–2082.
2. Li, X., Tu, J. (2019). Evaluation of the eddy viscosity turbulence models for the simulation of convection–radiation coupled heat transfer in indoor environment. *Energy and Buildings*, Vol. 184, pp. 8–18.
3. Zhang, X., Su, G., Yu, J., Yao, Z., He, F. (2015). PIV measurement and simulation of turbulent thermal free convection over a small heat source in a large enclosed cavity. *Building and Environment*, Vol. 90, pp. 105–113.
4. Saha, S. C. and Khan, M. M. K. (2011). A review of natural convection and heat transfer in attic-shaped space. *Energy and Buildings*, Vol. 43, pp. 2564–2571.
5. Miroshnichenko, I., Sheremet, M., Chamkha, Ali J. (2018). Turbulent natural convection combined with surface thermal radiation in a square cavity with local heater. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 28, No. 7, pp. 1698–1715.

БИЕКЦИЯ МЕЖДУ ДЕРЕВОМ И/ИЛИ И ГРАФИЧЕСКИМ КОМБИНАТОРНЫМ ОБЪЕКТОМ

Г.А. Филиппов, П.П. Щеглов

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Д.В. Кручинин

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 40, 634050

E-mail: egorcbn@gmail.com

BIJECTION BETWEEN AND/OR TREE AND GRAPHICAL COMBINATORIAL OBJECT

G.A. Filippov, P.P. Shcheglov

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD D.V. Kruchinin

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Russia, Tomsk, Lenin str., 40, 634050

E-mail: egorcbn@gmail.com

***Abstract.** This article addressed unsolved problems in different sectors of science where combinatorial objects are used. The main problem is the lack of a quick way to generate the object required. Possible solution to these problems is a new method to generate graphical combinatorial objects. With the help of and-or trees one can create algorithms to generate combinatorial objects if all conditions to use trees are met. The process of getting a tree for central polygonal numbers and its bijection is presented in the article as well.*

Введение. На сегодняшний день во многих отраслях науки можно встретить комбинаторные множества: цепочки ДНК в медицине, сплавы в химии, различные матрицы в криптографии и прочее [1]. При более детальном изучении таких комбинаторных множеств становится явной проблема отсутствия алгоритмов комбинаторной генерации для огромного количества комбинаторных множеств, которые позволили бы автоматически и в короткие сроки сгенерировать объекты данных множеств. Кроме того, отсутствуют какие-либо универсальные методы разработки таких алгоритмов комбинаторной генерации, что сильно усложняет процесс их получения для конкретно взятого комбинаторного множества. Поэтому итоговой целью проводимых исследований является построение метода, претендующего на универсальность в разработке алгоритмов комбинаторной генерации. В рамках данной работы была поставлена следующая задача: исследовать комбинаторное множество с графической интерпретацией и получить для него биективное отображение в структуру дерева И/ИЛИ.

Деревья И/ИЛИ. Деревья И/ИЛИ могут выступать в качестве инструмента для представления комбинаторного множества и его объектов. Основная идея заключается в использовании рекуррентных формул для представления множества в виде дерева. В качестве такой рекуррентной формулы выступает функция мощности, которая показывает какое количество объектов существует при заданных параметрах комбинаторного множества. Деревья могут состоять из И-узлов и ИЛИ-узлов, которые реализуют операции произведения и сложения над множествами [2].

Использование деревьев И/ИЛИ уже зарекомендовало себя в качестве эффективного средства получения алгоритмов комбинаторной генерации. Так как для многих объектов уже существует функция мощности, либо производящая функция, из которой можно получить первую, то получение дерева для множества зачастую сводится к использованию формулы без каких-либо ее преобразований либо с

предварительным ее преобразованием к нужной форме. Множество выражений таких функций можно обнаружить в онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей OEIS [3], например, если в данной базе ввести поисковой запрос в виде последовательности значений функции мощности для конкретного комбинаторного множества.

Центральные многоугольные числа. В качестве объекта для исследования были выбраны центральные многоугольные числа с номером A000124 в OEIS, которые показывают на какое максимальное количество кусков можно разрезать круг n прямыми линиями. Данные числа затрагивают проблему размещения прямых линий на плоскости, а также используются для оценки сложности цилиндрического алгебраического разложения [4]. Примеры расположения линий на круге можно увидеть на рис. 1. В данных примерах расположение линий на кругах не предоставляет его деление на максимальное количество кусков.

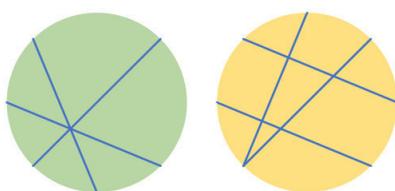


Рис. 1. Пример различного расположения линий на круге

Для построения дерева И/ИЛИ для комбинаторного множества, определяемого центральными многоугольными числами, требуется знать выражение формулы мощности данного комбинаторного множества. Известна следующая рекуррентная формула для функции мощности [3]:

$$p(n) = n + p(n-1), \quad p(0) = 1.$$

На основе данной формулы было построено дерево И/ИЛИ, которое представлено слева на рис. 2. Также на рис. 2 справа приведен пример полученной структуры дерева И/ИЛИ для случая $n = 3$.

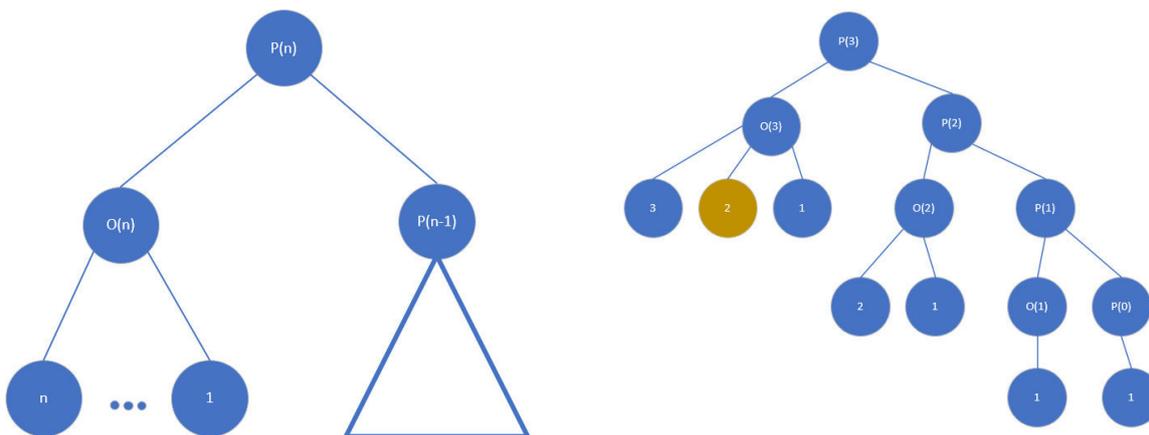


Рис. 2. Общая структура дерева И/ИЛИ и пример для $n = 3$

Далее были разработаны правила биекции между множеством вариантов дерева И/ИЛИ и множеством кусков, которые получаются при разрезе круга линиями. Данная биекция строится на основе следующих правил:

1. Установить начальную точку на окружности (например, северная точка);
2. Пронумеровать каждую линию в порядке их появления на круге;

3. Проверить какой сын выбран в варианте дерева в рамках ИЛИ-узла с пометкой $P(n)$:
- если выбран левый сын с пометкой $O(n)$, то выбранный лист у данного сына показывает какой из n созданных n -ой линией новый кусков выбран в круге. Новыми кусками, которые появляются после проведения новой линии, будем считать куски, которые находятся за линией если за точку отсчета принять начальную точку. Нумерация старых кусков, которые уменьшились за счет проведения новой линии, сохраняется прежней. Нумерация новых кусков задается следующим порядком: необходимо от начальной точки пройти вдоль окружности по направлению часовой стрелки до первого касания с новой линией, затем куски нумеруются в порядке их встречи вдоль прохождения по данной новой линии;
 - если выбран правый сын с пометкой $P(n-1)$, то необходимо исключить из дальнейшего рассмотрения все n созданных n -ой линией новых кусков и перейти к выбору кусков, образованных $(n-1)$ -ой линией, т.е. необходимо повторить Шаг 3 для $n-1$.

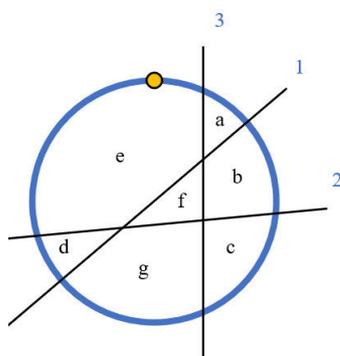


Рис. 3. Круг, разрезанный тремя линиями

Заключение. Благодаря разработанным правилам биекции между деревом И/ИЛИ и графическим комбинаторным объектом было получено однозначное сопоставление между конкретным куском круга и вариантом дерева И/ИЛИ. В дальнейшем на основе полученной биекции можно разработать алгоритмы нумерации и генерации по рангу комбинаторных объектов, что позволит создать программный генератор для данного комбинаторного множества.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта № 18-71-00059.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Michael S. Applications of combinatorics to molecular biology // Handbook of Combinatorics. – Elsevier Science B.V., 1995. – P. 1983-2001.
2. Кручинин В.В. Методы построения алгоритмов генерации и нумерации комбинаторных объектов на основе деревьев И/ИЛИ. – Томск: Изд-во «В-Спектр», 2007. – 200 с.
3. The on-line encyclopedia of integer sequences [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://oeis.org>. (дата обращения: 10.03.2020)
4. England M. Cylindrical algebraic decomposition with equational constraints / M. England, R. Bradford, J.H. Davenport // Journal of Symbolic Computation. – 2019.

**РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ГАЗА В
СОПЛОВЫХ БЛОКАХ**

А.В. Червакова, М.С. Серeda

Научный руководитель: младший научный сотрудник К.В. Костюшин
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

**DEVELOPMENT OF A PROGRAM FOR CALCULATING THE FLOW OF MULTICOMPONENT
GAS IN A NOZZLE**

A.V. Chervakova, M.S. Sereda

Scientific Supervisor: junior researcher K.V. Kostyushin
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

***Abstract.** A software package has been developed that allows calculating the parameters of multi-component gas flow in a rocket engine nozzle. The calculation algorithm is based on the solution of an augmented system of Euler equations for a multicomponent gas according to the of S.K. Godunov scheme. The Riemann problem is solved by the exact method of S.K. Godunov. Test calculations of flows of two-component non-reacting gas mixtures in a radius-conical nozzle were performed. The results of the test calculations are compared with the solutions obtained using one-component gas-dynamic equations.*

Введение. В ракетно-космической технике широко применяются металлизированные смесевые твердые ракетные топлива. Продуктами сгорания таких топлив является многокомпонентная реагирующая смесь газообразных продуктов сгорания с окислами и частицами металлов. Поэтому в настоящее время в России и за рубежом активно проводятся экспериментальные и расчетно-теоретические исследования высокоскоростных многофазных реагирующих потоков. Разработка компьютерных методов для расчета течений многокомпонентных химически-реагирующих газов в проточных трактах ракетных двигателей (РД) является актуальной задачей. Математическое моделирование позволяет повысить информативность и качество начальных этапов разработки, сократить период дорогостоящей экспериментальной отработки РД, что влечет снижение финансовых затрат и сроков создания двигателя в целом. Целью данной работы является разработка программного комплекса для расчета основных параметров течения многокомпонентного газа в сопловом блоке РД.

Методика расчета. Рассматривается одномерное нестационарное течение идеального многокомпонентного газа в сопле Лавала. Эффектами вязкости, теплопроводности и диффузии пренебрегается [1]. Алгоритм расчета параметров течения основан на решении расширенной системы уравнений Эйлера с использованием схемы С.К. Годунова первого порядка точности. Система разностных уравнений газовой динамики в этом случае примет вид [2]:

$$G_i \frac{\rho_i^{k+1} - \rho_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=i}^{i+1} (R_j U_j) S_j = 0, \quad (1)$$

$$G_i \frac{(\rho u)_i^{k+1} - (\rho u)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=i}^{i+1} [(R_j U_j^2 + P_j) S_j] = p_i^k \sum_{j=i}^{i+1} S_j, \quad (2)$$

$$G_i \frac{[\rho(\varepsilon + u^2/2)]_i^{k+1} - [\rho(\varepsilon + u^2/2)]_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=i}^{i+1} \{ [R_j U_j (E_j + U^2/2)] + P_j U_j \} S_j = 0, \quad (3)$$

$$G_i \frac{(\rho \alpha_n)_i^{k+1} - (\rho \alpha_n)_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=i}^{i+1} (R_j U_j A_n) S_j = 0. \quad (4)$$

Здесь G_i – объем ячейки, где i – номер ячейки, S_j – площадь грани ячейки, где j – номер грани, p , ρ , u , ε , α_n – давление, плотность, скорость, удельная внутренняя энергия газовой смеси и массовая концентрация компоненты смеси с номером n внутри ячейки, P , R , U , E , A_n – соответствующие параметры на гранях ячейки, Δt – временной шаг.

Система (1)-(4) замыкается уравнениями состояния для смеси совершенных газов:

$$p_n = \frac{R_g \rho_n T}{\mu_n}, \quad p = \frac{R_g \rho T}{\mu}, \quad p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad (5)$$

где p_n – парциальное давление компонента смеси, R_g – универсальная газовая постоянная, ρ_n – плотность компонента смеси, μ_n – молекулярная масса компонента смеси, γ – показатель адиабаты смеси.

Вычисление значений параметров газа на границах смежных ячеек реализуется с помощью точного решения задачи Римана о распаде разрыва. Алгоритм точного решения задачи Римана подробно описан в [2]. При переходе через ударную волну в случае не реагирующей газовой смеси выполняются условия неизменности концентраций.

В случае, если смесь состоит из газов, не вступающих между собой во взаимодействие, тогда, согласно закону Дальтона, давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений составляющих ее компонент, при этом парциальное давление компонента газовой смеси равно произведению общего давления смеси на массовую долю данного компонента:

$$p_m = p_{cm} \alpha_m. \quad (6)$$

Из закона Дальтона вытекает правило смешения: свойство газовой смеси равно сумме произведений соответствующих свойств ее компонент на их массовые доли в рассматриваемой смеси:

$$Y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_N y_N, \quad (7)$$

где Y – свойство газовой смеси, y_n – соответствующие свойства компонент смеси.

После определения массовых концентраций α_n из уравнения (4) производится расчет всех необходимых параметров для компонент смеси с помощью закона Дальтона (6), правила смешения (7) и уравнений состояния для компонент смеси (5).

Результаты расчетов и выводы. При реализации методики расчета (1)-(7) разработан программный комплекс с графическим интерфейсом «FlowCalculation» с помощью методологии объектно-ориентированного программирования на языке программирования C#. Пользовательский интерфейс программного комплекса разработан по программной модели WPF с использованием языка разметки XAML.

Тестовые расчеты проведены для одномерного течения двухкомпонентной не реагирующей газовой смеси в радиусно-коническом сопле. Значения исходных параметров приведены в таблице 1.

Таблица 1

Начальные и граничные условия для тестового расчета

Параметры газовой смеси	Начальные условия	Граничные условия на входе
Давление P , атм.	1	60
Скорость u , м/с	0	0
Температура T , К	300	3500
Массовая концентрация первого газа N_2	0,78	0,78
Массовая концентрация второго газа O_2	0,22	0,22

В ходе расчетов проводилось сравнение параметров течения не реагирующей газовой смеси, полученных с использованием схем для однокомпонентных и двухкомпонентных газодинамических уравнений. Разностные схемы реализованы на равномерной прямоугольной сетке. Результаты расчетов показаны в виде распределения давления смеси и парциальных давлений компонент смеси вдоль оси x (рис. 1). Критическое сечение сопла, где скорость потока достигает скорости звука, помещено в точку $x=0$.

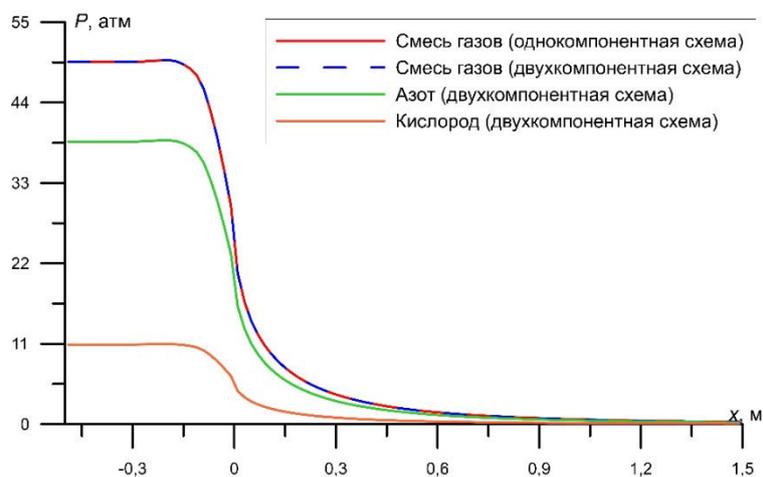


Рис. 1. Кривые давления смеси кислорода и азота и парциальных давлений компонент смеси

Видно, что решение, полученное с использованием схемы для двухкомпонентного газа, совпадает с точностью до изображения с решением, полученным с использованием схемы для однокомпонентного газа. Верификация результатов расчета проведена путем сравнения с [3], получено хорошее совпадение.

Результаты тестовых расчетов позволяют использовать разработанную методику и программу расчета для моделирования течений многокомпонентных реагирующих смесей газов в проточных трактах ракетных двигателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пирумов У.Г. Течения газа в соплах / У.Г. Пирумов, Г.С. Росляков. – М.: Изд-во Московского университета, 1978. – 288 с.
2. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др.; под ред. С. К. Годунова. – М.: Наука, 1976. – 400 с.: ил.
3. Северина Н.С. Сеточно-характеристический метод для расчета квазиодномерных нестационарных течений реагирующего газа // Известия ТулГУ. – 2018. – С. 127-133

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МИКРОКОНТРОЛЛЕРА ESP8266 В РАЗРАБОТКЕ ОБУЧАЮЩЕЙ ИГРЫ

Г.С. Чурсин

Научный руководитель: доцент, к. ф.-м. н. М.Е. Семенов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 40, 634050
E-mail: gsc2@tpu.ru

USING THE ESP8266 MICROCONTROLLER IN A LEARNING GAME DEVELOPMENT

G.S. Chursin

Scientific Supervisor: Associate Professor, PhD M.E. Semenov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: gsc2@tpu.ru

***Abstract.** This article discusses the possibility of connecting the ESP8266 microcontroller to a learning game developed on the Unity3D game engine. The game is aimed at training and development of student's skills. The paper presents a diagram of the interaction of the microcontroller and the game, as well as a comparative analysis of the Arduino and ESP8266 platforms.*

Введение. Современное традиционное образование остается неизменным уже долгие годы. Несмотря на существующие технологии и большое количество дополнительных образовательных курсов, серьезные попытки обновления подходов к обучению математике, механике и информатике практически отсутствуют. Традиционное образование строится на получение базовых знаний, умений и навыков, зачастую без объяснения необходимости получения этих самых знаний. Очевидно, необходимо искать пути к обновлению традиционного обучения, развивать активные образовательные методики с использованием современных педагогических инструментов и технологий. Авторы [1] отмечают, что компьютерные игры являются перспективным направлением в развитии образовательных методик. Глобально игры можно разделить на две категории: а) базовые игры для детей дошкольного возраста, где они учатся читать, считать, выполнять элементарные задачи, б) узкоспециализированные игры (симуляторы) для обучения определенным компетенциям. Таким образом, сфера обучающих компьютерных игр для школьников слабо развита.

Целью работы является создание компьютерной видеоигры для обучения школьников. Особенностью игры является необходимость использования школьных знаний для решения практических задач и головоломок. Это повысит уровень мотивации и интереса к изучению базовой образовательной программы. К тому же на фоне развития IT-технологий и такого направления как интернет вещей, необходимо обучать современных детей с использованием передовых технологий. Для этого в предлагаемой игровой технологии используются реальные микроконтроллеры и различные датчики, с которыми осуществляется физическое взаимодействие.

Экспериментальная часть. В данной работе особенностью игры является физическая коммуникация с микроконтроллерами, а также различными датчиками. При этом важно понимать, что зачастую игровой процесс может происходить на смартфоне или планшете. В этом случае подключение

платы по физическому кабелю затруднено. Чтобы избежать такой проблемы используется соединение по технологии Wi-Fi. Наиболее популярным решением является использование сочетания платформы Arduino и модуля Wi-Fi. Заметим, что данное сочетание не позволяет обновить прошивку без использования физического подключения платы к компьютеру. Для использования микроконтроллера в процессе игры это является необходимым условием, так как необходимо менять прошивку в зависимости от предлагаемой к решению задачи.

Для решения указанной проблемы мы предлагаем использовать микроконтроллер ESP8266 (Espressif Systems CO., LTD, Shanghai, Китай), особенностью которого является наличие Wi-Fi и Bluetooth модулей на одной плате с микропроцессором. Это позволяет избавиться от дополнительных соединений и уменьшить конечную схему проекта. Стоимость такого микроконтроллера сопоставима со стоимостью популярной платы Arduino, производимой в Китае, без вышеописанных модулей. При этом скорость работы процессора выше. Данная плата может прошиваться без использования физического кабеля, а с помощью протокола HTTP. На рисунке 1 представлена схема подключения микроконтроллера ESP8266 к игре с помощью Wi-Fi. Инициализация может происходить с помощью любого устройства, имеющего возможность подключения к сети Wi-Fi и браузер.

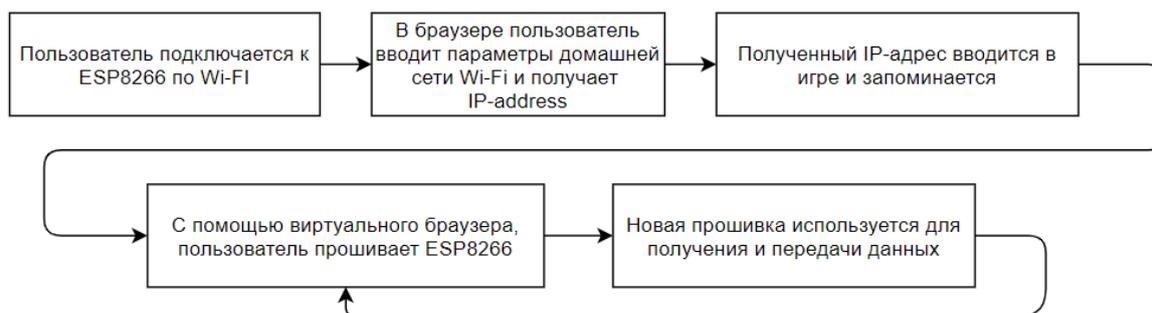


Рис.1. Схема подключения микроконтроллера ESP8266 к игре

Таблица 1

Сравнение подключения платы ArduinoUNO и микроконтроллера ESP8266 к среде Unity3D

Критерий	ArduinoUNO, USB подключение	ESP8266, Wi-Fi подключение
Простота подключения	Для прошивки необходимо использовать дополнительную программу bootloader и средства операционной системы	Прошивка не требует сторонних программ. Игра остается полностью изолированной от взаимодействия с операционной системой
Стабильность подключения	Подключение по USB не вызывает сбоев в прошивке	Проблемы с сетью могут привести к сбоям соединения, что не позволит продолжить игру
Удобство использования	Требуется постоянное физическое подключение	Имеется возможность собирать игровые схемы во всей зоне действия Wi-Fi
Универсальность	Использование программы для прошивки, позволяет использовать только персональный компьютер	Беспроводная прошивка позволяет использовать как персональный компьютер, так и смартфоны, планшеты
Время загрузки прошивки, сек	5 и менее	7 и менее

Обновление прошивки микроконтроллера происходит с помощью предварительно скомпилированных бинарных файлов. Под прошивкой понимается программное обеспечение, задачей которого является управление микроконтроллером. Исходный код для ESP8266 разрабатывается на языке программирования C и с использованием набора инструментов ESP8266_RTOS_SDK от компании Espressif Systems, в состав которого входят библиотеки и компилятор. Размер выходного файла в среднем всего 15 кб, что позволяет хранить большое количество прошивок. Все прошивки загружаются в архив игровых файлов. На основе критериев [1] мы провели сравнительный анализ подключения плат ESP8266 и ArduinoUNO к среде разработки компьютерных игр Unity3D (Таблица 1). Заметим также, что микроконтроллер ESP8266 обладает большим количеством оперативной памяти, а процессор обладает более высокой тактовой частотой [2]. Это позволяет использовать больше вычислений и значительно расширять используемые схемы.

Результаты. Была разработана пробная версия игры и прошивка для микроконтроллера ESP8266. Передача данных между микроконтроллером ESP8266 и Unity3D была осуществлена с помощью протокола TCP/IP. Использование данного протокола позволяет быть уверенным в последовательности передаваемых и получаемых данных, что является важным для бесперебойной работы игры. Сравнивая скорость передачи данных по USB микроконтроллером Arduino и с помощью Wi-Fi микроконтроллером ESP8266, можно отметить, что задержек не наблюдается. Объединение только двух устройств позволяет создавать сокет сервера прямо на микроконтроллере. Это не сказывается на производительности и качестве передачи данных.

Заключение. Обучение посредством развлечения становится весомой альтернативой традиционным практикам формального школьного и дополнительного образования. Для реализации обучающих программ активно используется интерактивное оборудование, мобильные приложения, событийные и игровые технологии, проектная деятельность. Проведенные эксперименты, связанные с подключением микроконтроллера ESP8266 и среды разработки Unity3D, позволяют сделать вывод о возможности дальнейшего использования этой схемы для использования при разработке обучающей игры [3]. Использование возможности обновления прошивки по беспроводной связи, с заранее скомпилированными файлами, дает возможность максимально упростить взаимодействие игры и платы, а портировать игру на смартфоны и планшеты. Предложенная схема подключения микроконтроллера к виртуальной игре дает возможность избавиться от необходимости установки драйверов и библиотек на компьютер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бершадский А.М., Янко Е.Е. Игровые компьютерные технологии в системе образования // Современная техника и технологии. – 2016. – № 9 [Электронный ресурс]. URL: <http://technology.snauka.ru/2016/09/10429>
2. Patnaikuni D. R. P.A Comparative Study of Arduino, Raspberry Pi and ESP8266 as IoT Development Board. International Journal of Advanced Research in Computer Science, vol. 8, no. 5, pp. 2350-2352, 2017.
3. Chursin G., Semenov M. Learning game development with Unity3D engine and Arduino microcontroller // Journal of Physics: Conference Series, no. 1488, 2020.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ:
РАЗРЕШИМОСТЬ В КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ**В.В. Шеметова

Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. С.С. Орлов

Иркутский государственный университет,

Россия, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1, 664003

e-mail: valentina501@mail.ru

**ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER: SOLVABILITY IN THE CLASS
OF DISTRIBUTIONS AND APPLICATIONS**V.V. Shemetova

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD S.S. Orlov

Irkutsk State University, Russia, Irkutsk, Karl Marx street, 1, 664003

e-mail: valentina501@mail.ru

***Abstract.** The unique solvability of the initial value problem for higher order abstract linear differential equation is studied. The Sobolev–Schwarz theory of distributions with values in Banach spaces is applied to the study of this problem. The fundamental solution of the considered differential operator is constructed in the form of a special operator valued function, which contains the commutators of the operator coefficients of the equation. The theorem of existence and uniqueness of the generalized solution of considered initial value problem is proved. An explicit formula for the generalized solution is obtained.*

Пусть E_1 и E_2 – банаховы пространства. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$D_N(u(t)) = Bu^{(N)}(t) - A_{N-1}u^{(N-1)}(t) - A_{N-2}u^{(N-2)}(t) - \dots - A_1u'(t) - A_0u(t), \quad N \geq 2,$$

здесь B, A_{i-1} – замкнутые линейные операторы $i = 1, \dots, N$, действующие из E_1 в E_2 , причем $D(B) \subseteq D(A_{N-1}) \cap D(A_{N-2}) \cap \dots \cap D(A_1) \cap D(A_0)$. Рассмотрим класс уравнений

$$D_N(u(t)) = f(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $u = u(t)$ и $f = f(t)$ – неизвестная и заданная функции со значениями в банаховых пространствах E_1 и E_2 соответственно. Для уравнения (1) зададим начальные условия

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \dots, \quad u^{(N-2)}(0) = u_{N-2}, \quad u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}. \quad (2)$$

Под *классическим решением* начальной задачи (задачи Коши) (1), (2) будем понимать функцию $u(t) \in C(t \geq 0; E_1) \cap C^N(t > 0; E_1)$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (2). Для исследования однозначной разрешимости и построения решения начальной задачи (1), (2) используется аппарат распределений Соболева–Шварца со значениями в банаховых пространствах и концепция фундаментального решения [1]. Далее продолжим классическое решение нулем на интервал $(-\infty; 0)$ следующим образом: $\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t)$. Тогда в пространстве $K'_+(E_1)$

распределений с ограниченным слева носителем рассматриваемая задача принимает вид сверточного уравнения

$$D_N(\delta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t), \quad (3)$$

с правой частью

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + \sum_{i=1}^N Bu_{N-i}\delta^{(i-1)}(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i A_i u_{i-j} \delta^{(j-1)}(t),$$

здесь и далее $\theta(t)$ и $\delta(t)$ – функции Хевисайда и Дирака. Единственным решением в $K'_+(E_1)$ уравнения (3) (обобщенным решением начальной задачи (1), (2)) является распределение $\tilde{u}(t) = \varepsilon(t) * \tilde{g}(t)$, где обобщенная оператор-функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет двум условиям

$$\forall v(t) \in K'_+(E_2) \quad D_N(\delta(t)) * \varepsilon(t) * v(t) = v(t),$$

$$\forall w(t) \in K'_+(E_1) \quad \varepsilon(t) * D_N(\delta(t)) * w(t) = w(t),$$

и называется *фундаментальным* решением дифференциального оператора $D_N(\delta(t))$. Смысл конструкции фундаментального решения состоит в следующем: если известен его вид, то единственным обобщенным решением задачи Коши (1), (2) является распределение $\tilde{u}(t) = \varepsilon(t) * \tilde{g}(t)$.

Теорема. Пусть линейный оператор B непрерывно обратим, тогда дифференциальный оператор $D_N(\delta(t))$ имеет фундаментальное решение вида

$$\varepsilon(t) = B^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{N+k-3}}{(N+k-3)!} e^{A_{N-1}B^{-1}s} U_{k-1}(s) ds \theta(t),$$

где $e^{A_{N-1}B^{-1}t}$ – операторная экспонента, $\{U_{k-1}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ – операторно-функциональная последовательность, заданная рекуррентно

$$U_k(t) = \sum_{i=2}^N \int_0^t V_{N-i}(s) U_{k-i+1}(s) ds, \quad U_0(t) = I_2, \quad U_{-k}(t) = O_2, \quad k = 1, \dots, N-2,$$

здесь $V_{i-1}(t) = e^{-A_{N-1}B^{-1}t} A_{i-1} B^{-1} e^{A_{N-1}B^{-1}t}$, $i = 1, \dots, N-1$, I_1 и I_2 – тождественные операторы, O_1 и O_2 – нулевые операторы в E_1 и E_2 соответственно.

Заметим, что $V_{i-1}(0) = A_{i-1} B^{-1}$ где $i = 1, \dots, N-1$, а операторы $V_{i-1}(t)$ и $A_{N-1} B^{-1}$ образуют пару Лакса [2], то есть $V'_{i-1}(t) = [V_{i-1}(t), A_{N-1} B^{-1}]$. По следствию из формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа [3] оператор-функция $V_{i-1}(t)$ представима операторно-функциональным рядом

$$V_{i-1}(t) = A_{i-1} B^{-1} + [A_{i-1} B^{-1}, A_{N-1} B^{-1}] \frac{t}{1!} + [[A_{i-1} B^{-1}, A_{N-1} B^{-1}], A_{N-1} B^{-1}] \frac{t^2}{2!} + \\ + \dots + [[[[A_{i-1} B^{-1}, A_{N-1} B^{-1}], A_{N-1} B^{-1}], A_{N-1} B^{-1}], A_{N-1} B^{-1}] \frac{t^3}{3!} + \dots, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

где $[A_{i-1}B^{-1}, A_{N-1}B^{-1}] = A_{i-1}B^{-1}A_{N-1}B^{-1} - A_{N-1}B^{-1}A_{i-1}B^{-1}$ – коммутатор операторов $A_{i-1}B^{-1}$ и $A_{N-1}B^{-1}$. Так как $D(B) \subseteq D(A_{N-1}) \cap D(A_{N-2}) \cap \dots \cap D(A_1) \cap D(A_0)$, то по теореме о замкнутом графике линейные операторы $A_{i-1}B^{-1}$ и $A_{N-1}B^{-1}$ являются ограниченными, откуда следует равномерная сходимость на любом компакте $[0; T]$ в топологии $L(E_2)$ указанных выше операторно-функциональных рядов.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы и $f(t) \in C(t \geq 0; E_1)$, тогда начальная задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение следующего вида

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = B^{-1} & \left[e^{A_{N-1}B^{-1}t} Bu_0 \theta(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_{N-1}B^{-1}s} U_k(s) ds Bu_0 \theta(t) + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \int_0^{t-s} \frac{(t-s-\tau)^{N+k-3}}{(N+k-3)!} e^{A_{N-1}B^{-1}\tau} U_{k-1}(\tau) f(s) d\tau ds \theta(t) + \\ & \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^t \frac{(t-s)^{N+k-i-2}}{(N+k-i-2)!} e^{A_{N-1}B^{-1}s} U_{k-1}(s) ds \left(Bu_{N-i} - \sum_{j=1}^{N-i} A_{N-j} u_{N-i-j} \right) \theta(t) \right]. \end{aligned}$$

Полученное обобщенное решение является регулярным и порождено обычной функцией $u = u(t)$, которая является сильно непрерывной на луче $[0; +\infty)$ и N раз сильно непрерывно дифференцируемой на интервале $(0; +\infty)$, обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (2), т. е. является классическим решением задачи Коши (1), (2).

Дифференциально-операторные уравнения в абстрактных пространствах позволяют с общих позиций изучать начально-краевые задачи механики сплошных сред. С помощью полученных результатов изучена однозначная разрешимость начально-краевой задачи, моделирующей колебания термоупругой пластины. Данная работа является продолжением исследований, проводимых автором ранее, например в [4], рассмотрен случай $N = 2$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-01-00643 А), РФФИ и ВАНТ в (№ 20-51-54003 Вьет_а), а также РФФИ и Правительства Иркутской области (№ 20-41-385002 р_Наставник).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2002. – 568 p.
2. Newell A.C. Solitons in Mathematics and Physics. – Philadelphia: SIAM, 1985. – 244 p.
3. Hall B.C. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 222. – New-York: Springer, 2015. – 453 p.
4. Шеметова В.В. Дифференциально-операторные уравнения второго порядка: разрешимость в классе распределений и приложения // Сборник научных трудов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. В 7-ми томах. – Томск: Изд-во ТПУ, 2019. – Т. 3. – С. 25–27.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД СЕГМЕНТАЦИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

А.О. Шерстобитова

Научный руководитель: доцент, канд. физ.-мат. наук Т.В. Емельянова
Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: annasherstobitova06@gmail.com

NON-PARAMETRIC METHOD OF TIME SERIES SEGMENTATION

A.O. Sherstobitova

Scientific Supervisor: Assoc. Prof., PhD T.V. Emelyanova
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: annasherstobitova06@gmail.com

***Abstract.** The problem of dividing time series of arbitrary nature X_t (stochastic, deterministic, or mixed) into segments generated by one mechanism, as well as detecting the moment of one generation mechanism changing by another, is considered. Based on the ε -complexity parameters, a new methodology for segmentation of time series is considered, which does not require any a priori knowledge about the mechanisms of their generation.*

Введение. В задачах обработки временных рядов часто встречается ситуация, когда временной ряд порожден различными механизмами генерации, однако у исследователя нет никакой априорной информации об этих механизмах. Для извлечения адекватной информации из массива данных необходима предварительная сегментация ряда на однородные подмассивы данных, без чего нельзя строить математические модели, оценивать параметры и т.д.

Целью исследования является обнаружение диагностической последовательности, не зависящей от априорной информации о механизмах генерации данных и позволяющей решить задачу сегментации временных рядов на однородные участки.

Материалы и методы исследования. Пусть $X = \{x(t)\}_{t=1}^N$ - временной ряд с неизвестными моментами изменения механизма генерации $t_j, j = 1, \dots, k$. Механизмы генерации ряда неизвестны и могут быть стохастическими, детерминированными или смешанными. Отрезки ряда $[t_i, t_{i+1}]$, $t_1 = 1, t_{k+1} = N$, которые генерируются одним и тем же механизмом, называем однородными. Б. С. Дарховским была сформулирована и доказана следующая теорема [1].

Теорема: Для любой функции $x(\cdot)$ из некоторого плотного подмножества множества totally nontrivial functions, удовлетворяющих условию Гельдера и заданных своими n отсчетами на равномерной решетке, любых (достаточно малых) $\kappa > 0, \delta > 0$ и $n \geq n_0(x(\cdot))$ существуют семейство методов аппроксимации F^* , числа $0 < \alpha(n, x(\cdot)) < \beta(n, x(\cdot)) < 1, A(n, x(\cdot)), B(n, x(\cdot)), |B(\cdot)| \geq c(n, x(\cdot)) > 0$,

функции $\rho(S), \zeta(S)$ и множество $N \subset Q = [\alpha(\cdot), \beta(\cdot)]$, $\mu(N) > \mu(Q) - \delta$, такие, что при аппроксимации методами $F \supseteq F^*$ для $S \in N$ справедливы соотношения

$$\log \varepsilon = A + B \log S + \rho(S) \log S + \zeta(S),$$

$$\sup_{S \in N} \max(|\rho(S)|, |\zeta(S)|) \leq \kappa \quad (1)$$

Таким образом, связь ε -сложности функции гёльдера класса, заданной конечным набором своих отсчетов на равномерной решетке, с погрешностью аппроксимации ε характеризуется парой действительных чисел (A, B) , называемые коэффициентами сложности [1].

Выберем окно размера n в соответствии с теоремой и для каждого отрезка ряда $x(t), t \in [jn + 1, (j + 1)n]$, $j = 0, 1, \dots, \left[\frac{N}{n} \right]$, будем вычислять коэффициенты сложности $R(j + 1)$. В результате получим новую диагностическую векторную последовательность $\{R(j)\}_{j=1}^{\left[\frac{N}{n} \right]}$.

Ключевая идея предлагаемой методологии заключается в гипотезе о том, что на i -м сегменте однородности $[t_i, t_{i+1}]$ временного ряда X для $t_i \leq t, t + n < t_{i+1}$ коэффициенты сложности удовлетворяют соотношению $R(j) = R_i + \xi^i(j)$, где R_i – математическое ожидание последовательности $R(j)$ на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, а $\xi^i(j)$ – последовательность случайных величин с нулевым математическим ожиданием. Иными словами, гипотеза означает, что средние значения коэффициентов сложности временного ряда остаются постоянными на интервалах его однородности, а изменение механизма генерации ряда в моменты $t_i, i = 2, \dots, k$ приводит к изменению этих средних значений.

Таким образом, если приведенная гипотеза справедлива, задача сегментации временного ряда сводится к задаче обнаружения «разладки» по среднему значению в диагностической векторной последовательности $R(j)$.

Для решения последней задачи предлагается использовать следующее семейство статистик

$$Y(s, \delta) = \left(\frac{(N_1 - s)s}{N_1^2} \right)^\delta \left(\frac{1}{s} \sum_{k=1}^s z(k) - \frac{1}{N_1 - s} \sum_{k=s+1}^{N_1} z(k) \right), \quad (2)$$

где $0 \leq \delta \leq 1, 1 \leq s \leq N_1 - 1, N_1 = \left[\frac{N}{n} \right], Z = \{z(k)\}_{k=1}^{N_1}$ – реализация компонент диагностической последовательности R [2].

Результаты. Проиллюстрируем теорему и методологию сегментации временных рядов Б.С. Дарховского. Для иллюстрации теоремы в качестве семейства F методов аппроксимации использовались кусочно-полиномиальные функции до 10 порядка включительно. В каждом эксперименте генерировался временной ряд, затем выполнялось разделение полученного временного ряда на «окна» размера n . Каждое «окно» обрабатывалось методом наименьших квадратов и

определялись коэффициенты зависимости (1) по значениям $\log \varepsilon, \log S$. Далее выполнялось обнаружение момента изменения механизма генерации («разладки») ряда. При помощи алгоритма, основанного на статистике (2), определялись моменты «разладки».

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов. Пусть $x(t)$ – процесс с 3 моментами смены механизма генерации: до первого момента «разладки» x_t – процесс авторегрессии скользящего среднего $ARMA(2,1)$ с параметрами $\phi = (0.003, 0.1), \theta = 0.002, \varepsilon_t$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $E\varepsilon_t = 0, E\varepsilon_t^2 = 1$, после первого момента «разладки» процесс описывается детерминированным уравнением, после второго момента «разладки» временной ряд снова является процессом авторегрессии скользящего среднего $ARMA(2,1)$ с теми же параметрами, после третьего момента «разладки» временной ряд – независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_t \square U[0,1]$.

$$x_t = \begin{cases} \varepsilon_t + \sum_{i=1,2} \phi_i x_{t-i} + \theta \varepsilon_{t-1}, t \leq k_1 \\ x_{t-1}^2 - 2, k_1 < t \leq k_2 \\ \xi_t, t > k_3 \end{cases}$$

Рассмотрим иллюстрацию теоремы. Здесь ось абсцисс – логарифм количества выброшенных точек в процентах, ось ординат – логарифм погрешности при аппроксимации полученной функции методом из набора F .

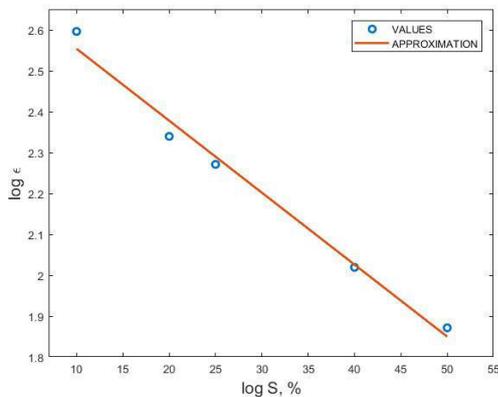


Рис. 1. Иллюстрация теоремы

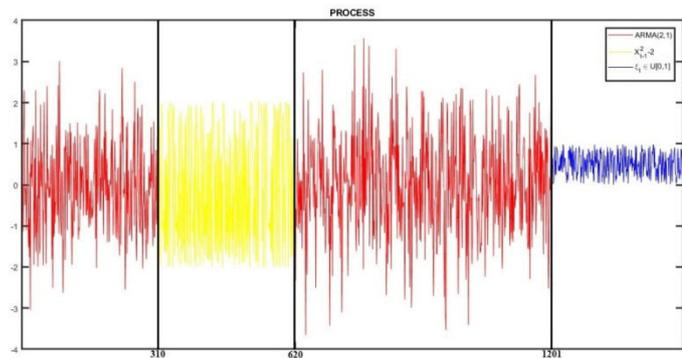


Рис. 2. Иллюстрация реализации модели

Можно заметить, что даже при сравнительно бедном наборе методов аппроксимации F зависимость вида (1) реализуется с хорошей точностью. Рассмотрим результаты вычислительного эксперимента. Временной ряд генерируется 4 различными механизмами генерации и имеет три момента смены механизма генерации $k_1 = 310, k_2 = 620, k_3 = 1201$. Объем набора данных составляет $N = 1500$ и разделяется на «окна» одинакового размера $n = 100$. «Разладка» детектируется тогда, когда различие в средних диагностической последовательности значимо. Результаты численного моделирования показали,

что «разладка» детектируется в 3, 6 и 12 окнах, что соответствует интервалам 300-400, 600-700 и 1200-1300 во временном ряде x_t . «Разладка» детектирована верно.

Заключение. Таким образом, алгоритм сегментации Б.С. Дарховского позволяет не только выполнить сегментацию временного ряда на однородные подмассивы, но и выполнить обнаружение аномалий во временном ряде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарховский Б.С., Пирятинская А. Новый подход к проблеме сегментации временных рядов произвольной природы // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. – 2014. -Т. 287. - С. 61-74
2. Brodsky В.Е., Darkhovsky В. S. Non-parametric statistical diagnosis: Problems and methods. Dordrecht: Kluwer, 2000.

**РАЗРАБОТКА ПРАВИЛ БИЕКЦИИ МЕЖДУ МНОЖЕСТВОМ ВАРИАНТОВ ДЕРЕВА И/ЛИ
И МНОЖЕСТВОМ ВАРИАНТОВ ОТВЕТА НА ЗАКРЫТЫЕ ТЕСТЫ**

П.П. Щеглов, Г.А. Филиппов

Научный руководитель: Ю.В. Шаблия

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 40, 634050

E-mail: justyvyks@gmail.com

**THE DEVELOPMENT OF A BIJECTION BETWEEN THE SET OF AND-OR TREE VARIANTS
AND THE SET OF CLOSED QUESTIONNAIRE ANSWERS**

P.P. Shcheglov, G.A. Filippov

Scientific supervisor: Y.V. Shablya

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Russia, Tomsk, Lenin str., 40, 634050

E-mail: justyvyks@gmail.com

***Abstract.** In the present study, we obtain a cardinality function for the combinatorial set of all possible closed questionnaire answers to a test containing n questions with m answers for each one. Using the obtained formula, we get the corresponding and-or tree structure for the combinatorial set. In addition, we develop ranking and unranking algorithms for the combinatorial set.*

Введение. Для организации контрольных тестирований и опросов могут применяться вопросы открытого и закрытого типа. Ответ на вопрос открытого типа человек находит самостоятельно, а когда вопрос закрытого типа, то ему предлагаются варианты ответа. Закрытые тесты активно используются образовательными, социологическими и прочими организациями. Их основные цели – это контроль знаний и навыков (как на входном, так и на последующих этапах обучения); оценка уровня квалификации, психического здоровья и других характеристик; анализ статистических данных. За счёт фиксированности числа возможных вариантов ответов в закрытых тестах становится возможной автоматизация процессов хранения, передачи и обработки подобных данных [1, 2]. При этом для работы с потенциально большими данными одной из проблем является способ их кодирования в системе.

Данная проблема относится к теме комбинаторной генерации, в рамках которой Ф. Раски [3] выделил задачи последовательной генерации, ранжирования и генерации по рангу, а также генерации в случайном порядке элементов рассматриваемого комбинаторного множества. Комбинаторное множество – это конечное множество, элементы которого имеют определённую структуру, и существует процедура построения элементов этого множества [4, 5].

В качестве объекта исследования выбрано комбинаторное множество всех возможных вариантов ответов на тест, содержащий n вопросов с m вариантами ответа в каждом вопросе, один из которых является правильным, и пороговое количество правильных ответов t . Целью исследования является разработка алгоритмического и программного обеспечения комбинаторной генерации для представленного комбинаторного множества.

Материалы и методы исследования. Из существующих методов разработки алгоритмов комбинаторной генерации (таких как метод поиска с возвратом, ЕСО-метод, метод Ф. Флажолле, метод Б.Я. Рябко и метод В.В. Кручинина) для работы с исследуемым комбинаторным множеством был выбран метод В.В. Кручинина, основанный на использовании деревьев И/ИЛИ. Преимущества данного метода перед другими – это возможность построения алгоритмов последовательной генерации, ранжирования и генерации комбинаторных объектов в соответствии с заданным рангом, а также его применения для комбинаторных множеств, описываемых более, чем одним параметром, при минимальных дополнительных требованиях (а именно наличие функции мощности множества из алгебры $\{\square, +, \times, R\}$, где R – оператор примитивной рекурсии [6]).

Результаты. Для исследуемого комбинаторного множества получена следующая формула для функции мощности данного множества:

$$A(n, m, t) = \sum_{k=t}^n C_n^k \cdot (m-1)^{n-k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ является количеством сочетаний из n элементов по k .

По полученному выражению функции мощности комбинаторного множества построено дерево И/ИЛИ, которое представлено на рисунке 1.

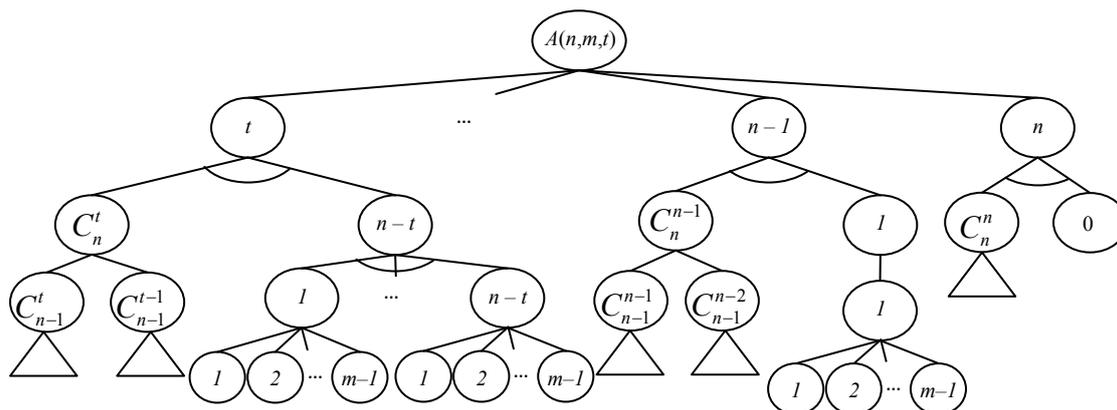


Рис. 1. Дерево И/ИЛИ для исследуемого комбинаторного множества

Каждый элемент комбинаторного множества (возможный вариант ответа на тест) будем кодировать в виде последовательности представленных ответов $a = a_1 a_2 \dots a_n$ на n вопросов, где $a_i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. При этом если $a_i = 0$, то это означает, что на вопрос под номером i был дан правильный ответ, иначе значение a_i указывает порядковый номер выбранного ответа среди неправильных вариантов ответа. Для определения биекции между элементами комбинаторного множества и множества вариантов дерева И/ИЛИ были выявлены изменения, происходящие при переходе от одного узла дерева И/ИЛИ к другому. Выбранный сын в рамках ИЛИ-узла с пометкой $A(n, m, t)$ соответствует количеству данных верных ответов k (соответствует количеству нулей в последовательности a). Порядок верных ответов среди всех данных ответов на вопросы определяется левым сыном И-узла – поддеревом сочетаний (в случае если был выбран левый сын на i -м шаге, то ответ на i -й вопрос является неверным и кодируется как «_», иначе он является верным и кодируется как «0»). Правый сын И-узла определяет выбранный вариант ответа на оставшиеся $n - k$ вопросов, ответы на которые были даны неверно.

На рисунке 2 представлен пример варианта дерева И/ИЛИ при $n = 4$, $m = 5$, $t = 2$. На основе разработанных правил биекции данному варианту дерева И/ИЛИ будет соответствовать следующая последовательность представленных ответов:

$$a = _0_0 \Rightarrow a = 3\ 0\ 2\ 0.$$

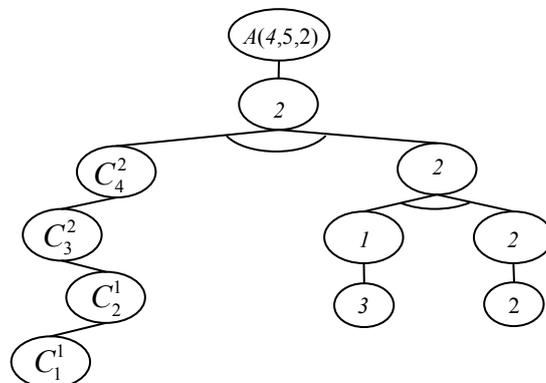


Рис. 2. Пример варианта дерева И/ИЛИ при $n = 4$, $m = 5$, $t = 2$

Также на основе полученного представления исследуемого комбинаторного множества в виде структуры дерева И/ИЛИ с помощью метода В.В. Кручинина были разработаны алгоритмы ранжирования и генерации по рангу. Например, для представленного на рисунке 2 варианта дерева И/ИЛИ соответствующий ранг равен 37.

Заключение. Полученное выражение функции мощности для множества всех возможных вариантов ответов на тест, содержащий n вопросов с m вариантами ответа в каждом вопросе, позволило построить соответствующую ему структуру дерева И/ИЛИ. Кроме того, были разработаны алгоритмы ранжирования и генерации по рангу для данного множества, а также создана их программная реализация на языке программирования Python.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-71-00059.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Desai S.C. Comparing the use of open and closed questions for Web-based measures of the continued-influence effect / S.C. Desai, S. Reimers // Behavior Research Methods. – 2019. – V. 51. – P. 1426-1440.
2. Reja U. Open-ended vs. close-ended questions in Web questionnaires / U. Reja, K.L. Manfreda, V. Hlebec, V. Vehovar // Developments in Applied Statistics. – 2003. – V. 19. – P. 159-177.
3. Ruskey F. Combinatorial generation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/SemWS17-18/Ruskey-Comb-Gen.pdf>. (дата обращения: 10.03.2020)
4. Кручинин В.В. Методы, алгоритмы и программное обеспечение комбинаторной генерации: Дис. ... д-ра техн. наук. – Томск, 2010. – 387 с.
5. Кручинин В. В. Методы построения алгоритмов генерации и нумерации комбинаторных объектов на основе деревьев И/ИЛИ. – Томск: В-Спектр, 2007. – 200 с.
6. Шабля Ю.В. Алгоритмическое обеспечение комбинаторной генерации на основе применения теории производящих функций: Дис. ... канд. техн. наук. – Томск, 2019. – 123 с.

ПРОГРАММА ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

[САЕ «Институт «Умные материалы и технологии»](#) Национального исследовательского Томского государственного университета приглашает дипломированных специалистов пройти программу повышения квалификации

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В ПОЛУЧЕНИИ И ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Направление 04.00.00 «Химия», 72 ч.

Модульная структура обучения:

Модуль 1: Новые подходы в получении и исследовании функциональных материалов

Модуль 2: Методы исследования структуры, состава и физико-химических свойств функциональных материалов

Профессиональные компетенции, формируемые в результате обучения:

- способность проводить научные исследования по сформулированной тематике, самостоятельно составлять план исследования и получать новые научные и прикладные результаты (ПК-1);
- владение теорией и навыками практической работы в избранной области химии (ПК-2);
- готовность использовать современную аппаратуру при проведении научных исследований (ПК-3);
- способность участвовать в научных дискуссиях и представлять полученные в исследованиях результаты в виде отчетов и научных публикаций (стендовые доклады, рефераты и статьи в периодической научной печати) (ПК-4).

Обучение в рамках образовательной программы реализуют ученые с высокой научной квалификацией из ведущих научных организаций РФ и зарубежья. Практическая часть курса проводится с использованием современного аналитического и исследовательского оборудования Томского регионального центра коллективного пользования и на базе структурных подразделений [САЕ «Институт «Умные материалы и технологии»](#).

КОНТАКТЫ

Руководитель программы: Курзина Ирина Александровна, д.ф.-м.н., профессор кафедры физической и коллоидной химии ХФ, директор [САЕ «Институт «Умные материалы и технологии»](#), e-mail kurzina99@mail.ru.

Координатор программы: Анищенко Юлия, менеджер учебного офиса [САЕ «Институт «Умные материалы и технологии»](#), e-mail j.anishch@gmail.com.

АДРЕС

Россия, Томская обл., 634028, г. Томск, ул. А. Иванова, 49 (химический факультет ТГУ). Запись по [ссылке](#).